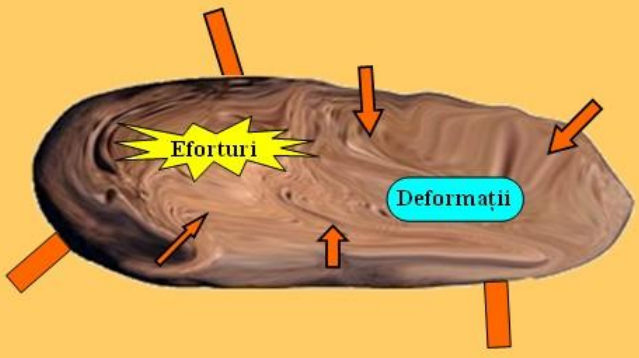
MARIAN PAVELESCU

MANUAL DE REZISTENȚA MATERIALELOR

PENTRU LICEE TEHNICE ŞI ŞCOLI PROFESIONALE



S.L. CLIMATE
2004

CUPRINS

I. NOŢIUNI INTRODUCTIVE 5
II. DEFINIREA SOLICITĂRILOR 6
II. 1. Forţe 6
II. 2. Corpuri 7
II. 2. 1. Clasificarea corpurilor 8
II. 2. 2. Materialele corpurilor 8
II. 3. Solicitări 9
III. LEGEA LUI HOOKE 12
III. 1. Mărimi utilizate 12
III. 2. Generalităţi 12
IV. REZISTENŢE ADMISIBILE ŞI COEFICIENŢI DE SIGURANŢĂ 17
IV. 1. Mărimi utilizate 17
IV. 2. Generalităţi 17
Tabelul nr.1 20
V. ÎNTINDEREA 21
V. 1. Mărimi utilizate 21
V. 2. Generalităţi 21
V. 3. Diagrama forţelor normale 22
V. 4. Calculul la întindere 23
V. 5. Mersul calculelor 24
V. 5. 1. Condiţia de rezistenţă 24
Dimensionarea 24
Verificarea 24
Determinarea forţei capabile 24
V. 5. 2. Condiţia de rigiditate 24
Dimensionarea 24
Verificarea 25
Determinarea forţei capabile 25
V. 6. Sinteza solicitării 25
V. 7. Aplicaţii 26
VI. COMPRESIUNEA 30
VI. 1. Mărimi utilizate 30
VI. 2. Generalităţi 30
VI. 3. Diagrama forţelor normale 31
VI. 4. Calculul la compresiune 32
VI. 5. Mersul calculelor 32
VI. 5. 1. Condiţia de rezistenţă 32
Dimensionarea 32
Verificarea 32
Determinarea forţei capabile 33
VI. 5. 2. Condiţia de rigiditate 33
Dimensionarea 33

Verificarea....33
Determinarea forţei capabile....34
VI. 6. Sinteza solicitării....34
VI. 7. Aplicaţii....34
VII. FORFECAREA....38
VII. 1. Mărimi utilizate....38
VII. 2. Generalităţi....38
VII. 3. Calculul la forfecare....39
VII. 4. Mersul calculelor....40
VII. 4. 1. Condiţia de rezistenţă....40
Dimensionarea....40
Verificarea....40
Determinarea forţei capabile....40
VII. 4. 2. Condiţia de rigiditate....41
Dimensionarea....41
Verificarea....41
Determinarea forţei capabile....41
VII. 5. Sinteza solicitării....42
VII. 6. Aplicaţii....42
VIII. MOMENTE DE INERŢIE, MODULE DE REZISTENŢĂ....45
VIII. 1. Mărimi utilizate....45
VIII. 2. Generalităţi....45
VIII. 3. Momente statice....46
VIII. 3. 1. Aplicaţii....46
VIII. 4. Momente de inerţie....47
VIII. 4. 1. Momente de inerţie axiale....47
VIII. 4. 2. Momente de inerţie centrifuge....48
VIII. 4. 3. Momente de inerţie polare....48
VIII. 4. 4. Variaţia momentelor de inerţie axiale în raport cu două axe paralele....48
VIII. 5. Raze de inerţie....49
VIII. 6. Module de rezistenţă....49
VIII. 7. Momente de inerţie şi module de rezistenţă pentru unele suprafeţe geometrice simple....50
Tabelul nr.2....50
Tabelul nr.3....51
IX. ÎNCOVOIEREA....52
IX. 1. Mărimi utilizate....52
IX. 2. Generalităţi....53
IX. 3. Reazeme....56
IX. 4. Reacţiuni....57
IX. 4. 1. Legea echilibrului forţelor....58
IX. 4. 2. Legea echilibrului momentelor....58
IX. 4. 3. Aplicaţie....59
IX. 5. Diagrama forţelor tăietoare....60
IX. 5. 1. Reguli de trasare....61
IX. 5. 2. Aplicaţie....61
IX. 6. Diagrama momentelor încovoietoare....61
IX. 6. 1. Reguli de trasare....62
IX. 6. 2. Aplicaţie....62
IX. 7. Calculul la încovoiere....63
IX. 8. Mersul calculelor....63
IX. 8. 1. Condiţia de rezistenţă....63
Dimensionarea....63

Verificarea....64
Determinarea momentului capabil....65
IX. 9. Sinteza solicitării....65
IX. 10. Aplicaţii....65
X. RĂSUCIREA....71
X. 1. Mărimi utilizate....71
X. 2. Generalităţi....71
X. 3. Calculul la răsucire....74
X. 4. Mersul calculelor....75
X. 4. 1. Condiţia de rezistenţă....75
Dimensionarea....75
Verificarea....75
Determinarea momentului de răsucire capabil....76
X. 4. 2. Condiţia de rigiditate....76
Dimensionarea....76
X. 5. Calculul la răsucire al arborilor....76
X. 5. 1. Diagrama momentelor de răsucire....76
X. 5. 2. Aplicaţie....77
X. 6. Sinteza solicitării....78
X. 7. Particularizare – calculul arcurilor elicoidale cilindrice....78
X. 7. 1. Aplicaţii....79
XI. FLAMBAJUL....82
XI. 1. Mărimi utilizate....82
XI. 2. Generalităţi....82
XI. 3. Flambajul barelor drepte, comprimate axial....83
XI. 4. Mersul calculelor....85
Dimensionarea....85
Verificarea....87
XI. 5. Aplicaţii....88
XII. ÎNCERCĂRILE MECANICE ALE MATERIALELOR....91
XIII. BIBLIOGRAFIE....93

I. NOŢIUNI INTRODUCTIVE

Asupra pieselor maşinilor acţionează diverse forţe, care produc **solicitări**. Cunoaşterea solicitărilor ne permite calculul organelor de maşini astfel ca ele să reziste în funcţionare, o anumită perioadă de timp. Cu acest domeniu se ocupă **Rezistenţa materialelor**, o parte a mecanicii aplicate, care evaluează eforturile şi deformaţiile pe care le suportă o structură sub acţiunea forţelor.

Disciplinele mecanicii aplicate:

- *Mecanica teoretică*
- *Teoria elasticităţii şi plasticităţii*
- *Teoria stabilităţii elastice*
- *Teoria vibraţiilor mecanice*
- *Încercările mecanice ale materialelor*

Problemele realizării unui obiect cu o anumită destinaţie sunt contemporane cu umanitatea.

Condiţiile ca forma şi dimensiunile date unui material să asigure utilizarea sa optimă, cu cele mai reduse consumuri, sunt condiţii economice care stau la baza oricărui proiect tehnic.

Din acest punct de vedere, rezistenţa materialelor este o disciplină practică, pentru care progresul informaţional este vital.

OBSERVAŢII	Din cele prezentate mai sus, manualul se ocupă numai de cunoaşterea solicitărilor statice simple ale barelor drepte, ceea ce reprezintă forma iniţială de abordare. Această introducere în rezistenţa materialelor este suficientă ca informare elementară, ca bază pentru un studiu ulterior aprofundat care să ducă la utilizarea disciplinei ca ştiinţă aplicativă.

Fig. 1. Racheta – solicitare complexă

II. DEFINIREA SOLICITĂRILOR

II. 1. Forţe

Forţă – acţiune care schimbă starea de mişcare a unui corp.

Cuvinte cheie	Pentru Internet
forţe exterioare	external forces
forţe interioare	internal forces
reacţiuni	reactions
eforturi	stresses
deformaţii	strains

Orice piesă în funcţiune este supusă acţiunii unor **forţe**. Acestea se clasifică după mai multe criterii:

- *după poziţia faţă de piesă:*
  - exterioare
    - de suprafaţă
    - de volum
  - interioare
- *după modul de aplicare asupra piesei:*
  - statice
  - dinamice

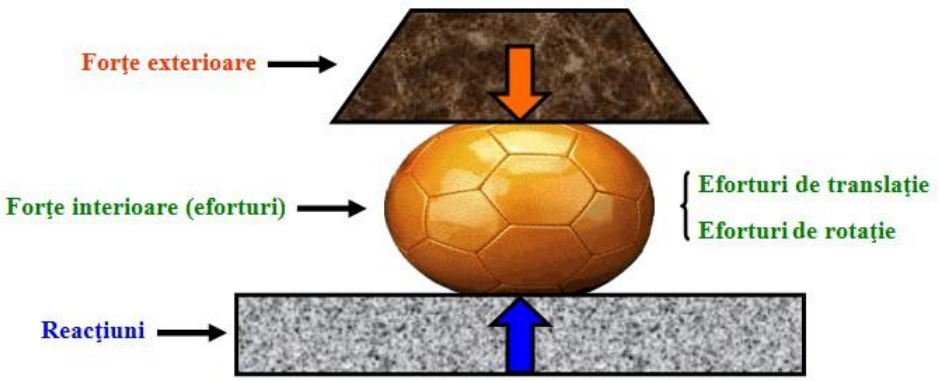


Fig. 2. Schema forţelor

Forţă exterioară de suprafaţă – forţa care se aplică pe anumite porţiuni din suprafaţa exterioară a piesei.

Forţă de legătură (reacţiune) – forţa care reprezintă legătura (**reazemul**) piesei cu un corp

învecinat.

Distribuţia forţelor pe suprafaţă poate fi:

- *concentrată*
- *distribuită:*
  - uniform
  - neuniform

Forţă exterioară de volum – reprezintă forţa distribuită în întreaga masă a materialului (greutatea, inerţia, forţele electromagnetice).

Forţă interioară – arată legătura care există între particulele din interiorul unui corp.

Efort – rezultanta forţelor interioare ca urmare a solicitărilor exterioare

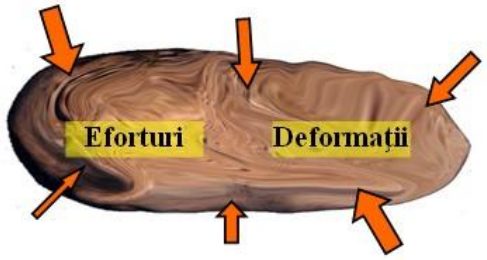


Fig. 3. Rezultatul forţelor exterioare

Forţă statică – forţa aplicată lent, progresiv, până la o valoare care rămâne constantă în timp.

Forţă dinamică – forţa aplicată cu variaţii de viteză.

Variaţia poate fi:

- bruscă – şoc
- periodică – oscilaţie continuă între două valori

Sarcină – mărimea care produce o stare de solicitare mecanică (tensiuni şi deformaţii) într–un corp.

Poate fi forţă, moment, câmp etc.

Solicitare – acţiunea sarcinilor asupra unui corp

OBSERVAŢIE	În continuare, vom opera cu cele mai simple forţe exterioare: de suprafaţă, statice, concentrate.

II. 2. Corpuri

Corp – porţiune de materie cu masă diferită de zero.

Cuvinte cheie	Pentru Internet
corp	material
bară	bar

Rezistenţa materialelor studiază efectul sarcinilor asupra unor corpuri reale, care pot avea forme complicate. Pentru simplificare formele sunt schematizate, cu condiţia ca rezultatele să fie apropiate de realitate (experimente).

II. 2. 1. Clasificarea corpurilor

- *bare – au o dimensiune mare faţă de celelalte două (corpuri cu fibră medie). După formă există bare drepte şi bare curbe*
- *plăci – au două dimensiuni mari faţă de a treia. După formă există plăci plane şi plăci curbe*
- *corpuri masive – au cele trei dimensiuni de mărimi apropiate*

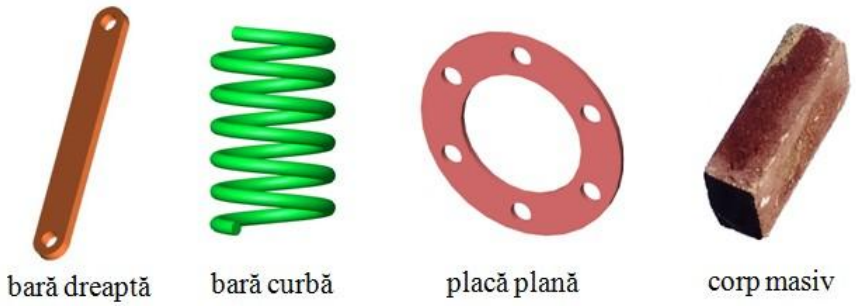


Fig. 4. Tipuri de corpuri

II. 2. 2. Materialele corpurilor

Pentru stabilirea relaţiilor de calcul rezistenţa materialelor face ipoteze asupra structurii materialelor şi a comportării lor sub sarcini.

Ipoteză – presupunere rezultată din observaţie, care este confirmată prin experiment sau verificată prin deducţie.

Ipotezele asupra materialelor cu care operăm constituie simplificări ale fenomenelor reale, acceptabile pentru scopul rezistenţei materialelor

Ipoteza mediului continuu – consideră materialele ca un mediu continuu, omogen, ce ocupă întregul spaţiu reprezentat de volumul lor.

(In realitate materialele sunt amorfe sau cristaline iar teoriile forţelor interatomice încă nu au explicat efectele sarcinilor exterioare.)

Ipoteza izotropiei – consideră că materialele au aceeaşi comportare, indiferent de direcţia pe care acţionează forţele exterioare.

(*Anizotrop* – material care nu se comportă la fel când direcţia forţelor se schimbă (ex. lemnul).)

Ipoteza elasticităţii prefecte – consideră materialele perfect elastice, până la anumite valori ale sarcinilor; când sarcinile dispar, corpul îşi reia forma şi dimensiunile iniţiale.

Ipoteza relaţiei liniare între eforturi şi deformaţii – Consideră că, în regim elastic,

creşterea deformaţiei este direct proporţională cu creşterea efortului (**legea lui Hooke**). O consecinţă în această ipoteză este că se poate aplica principiul suprapunerii efectelor.

Ipoteza lui Bernoulli – consideră că o secţiune plană, normală pe axa barei înainte de deformare, rămâne plană şi normală şi după deformare. Ipoteza se verifică experimental pe conturul barelor; se admite ca valabilă şi în interior.

Ipoteza deformaţiilor mici – consideră deformaţiile elastice ale corpurilor ca fiind mici in raport cu dimensiunile lor.

(Această ipoteză reprezintă şi o condiţie impusă la funcţionarea majorităţii organelor de maşini.)

II. 3. Solicitări

Solicitare – acţiunea sarcinilor asupra unui corp.

Cuvinte cheie	Pentru Internet
solicitare	strength
eforturi normale, forţă normală	normal force
forţă tăietoare	shear force
moment de încovoiere	bending moment
moment de torsiune	twisting moment

Forţele interioare ne arată legăturile care există între particulele din interiorul unui corp. Aceste forţe se pot pune în evidenţă prin metoda secţiunilor.

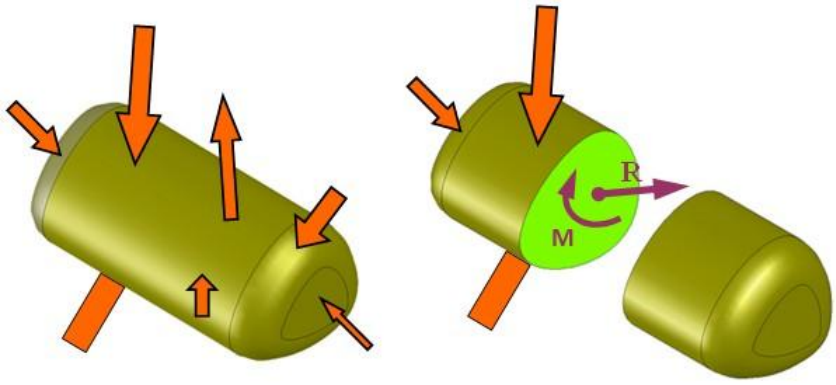


Fig. 5. Corp în echilibru

Considerăm un corp pe care acţionează mai multe forţe, datorită cărora corpul stă în **echilibru**.

Dacă secţionăm corpul cu un plan, perpendicular pe axa sa, nici una din părţi nu mai este în echilibru.

Pentru a echilibra partea din stânga, de exemplu, trebuie să introducem în planul secţiunii un sistem de **forţe** şi **cupluri (momente)** care să suplinească forţele înlăturate. Aceşti înlocuitori se numesc **forţe interioare** (sau **eforturi**, cum le vom numi în continuare).

În cazul general, eforturile au direcţii oarecare în spaţiu, astfel că le vom descompune după un sistem de axe ortogonale.

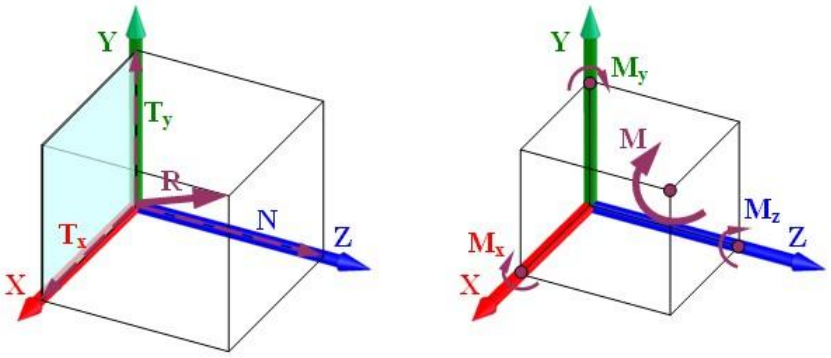


Fig. 6. Descompunerea forţelor şi momentelor

Forţa **R** se descompune în:	Forţa în lungul axei **X**, notată T_x (transversală, în planul secţiunii plane)
	Forţa în lungul axei **Y**, notată T_y (transversală, în planul secţiunii plane)
	Forţa în lungul axei **Z**, notată **N** (normală pe planul secţiunii plane)
Momentul **M** se descompune în:	Momentul în jurul axei **X**, notat M_x
	Momentul în jurul axei **Y**, notat M_y
	Momentul în jurul axei **Z**, notat M_z

OBSERVAŢII	Pentru ca un corp să fie în echilibru se cer îndeplinite următoarele condiţii: 1. Suma tuturor forţelor să fie egală cu 0 $\sum F = 0$ 2. Suma tuturor momentelor să fie egală cu 0 $\sum M = 0$ Pentru un element în plan ecuaţiile de echilibru devin: 1. Suma tuturor forţelor în lungul axei X să fie 0 $\sum F_X = 0$ 2. Suma tuturor forţelor în lungul axei Y să fie 0 $\sum F_Y = 0$ 3. Suma tuturor momentelor în jurul axei Z să fie 0 $\sum M_Z = 0$

Deosebim două feluri de eforturi:

- *de translaţie – la care secţiunile transversale rămân paralele şi după solicitare*
- *de rotaţie – la care secţiunile transversale devin rotite unele faţă de altele după solicitare*

În felul acesta putem sistematiza eforturile.

Componentele eforturilor care tind să dea o translaţie secţiunilor le numim **forţe**:

- ***forţa axială (normală)*** **– N**
  - produce solicitarea de întindere (ori compresiune)
- ***forţe tăietoare*** **–** T_x, T_y

– produc solicitarea de forfecare sau tăiere

Componentele eforturilor care tind să dea o rotaţie secţiunilor le numim **momente** (**cupluri**):

- ***momentul de încovoiere*** – M_x
  - tinde să dea o rotaţie în jurul unei axe conţinute în planul secţiunii
  - produce solicitarea de încovoiere
- ***momente de răsucire (torsiune)*** – M_y, M_z
  - tind să dea o rotaţie în jurul unei axe perpendiculare pe planul secţiunii
  - produc solicitarea de răsucire (torsiune)

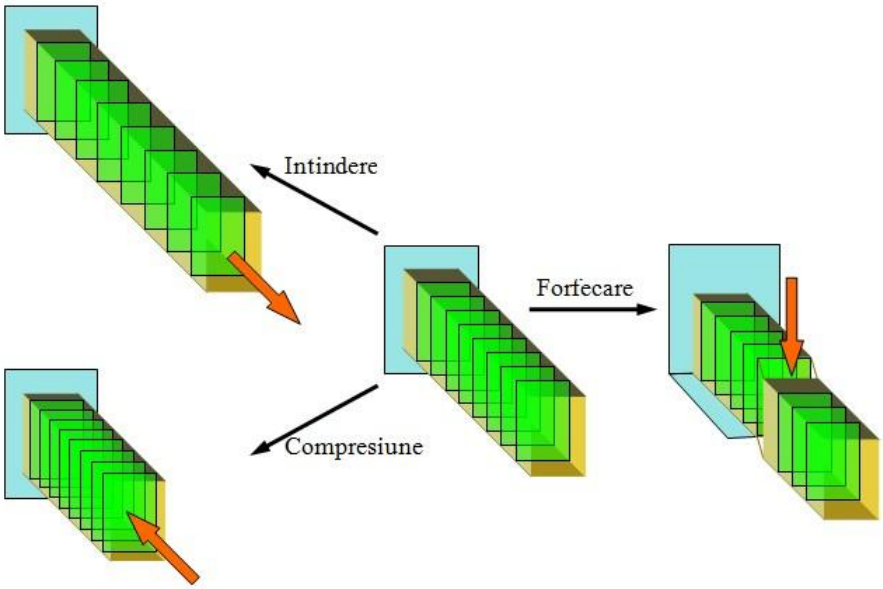


Fig. 7. Eforturile de translaţie (date de forţe)

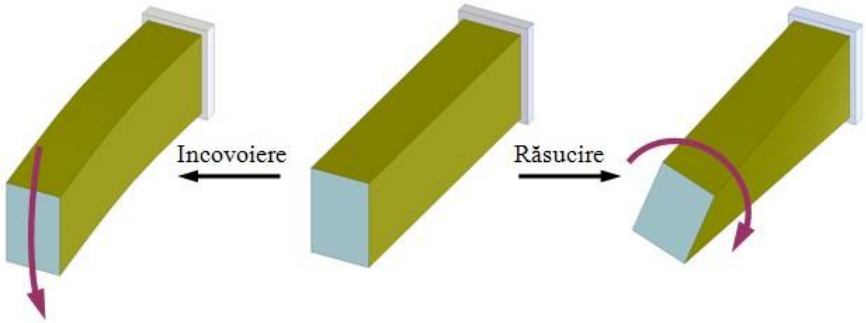


Fig. 8. Eforturile de rotaţie (date de momente)

III. LEGEA LUI HOOKE

III. 1. Mărimi utilizate

Simbolul	Denumirea	Unitatea de măsură
l	lungimea iniţială	**mm**
S	secţiunea	**mm^2**
Δl	alungirea	**mm**
N	forţa normală	**N**
ε	alungirea specifică	**–**
σ	efortul unitar	$\frac{N}{mm^2}$
E	modulul de elasticitate longitudinală	$\frac{N}{mm^2}$

III. 2. Generalităţi

Considerăm o bară dreaptă, cu lungimea **l** şi secţiunea **S**, fixată la un capăt.

Dacă la capătul celălalt acţionează forţa normală **N** (în lungul axei barei), bara se va alungi cu segmentul **Δl** pe care îl numim alungire.

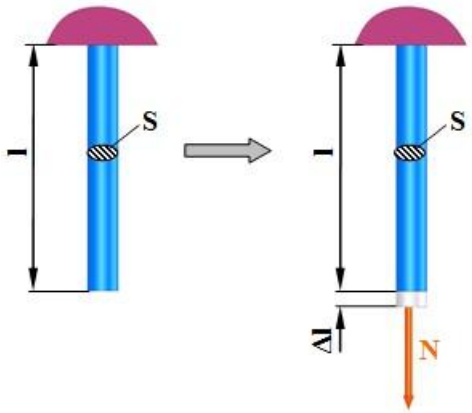


Fig. 9. Bară solicitată la întindere

Materialele folosite în practică sunt de o mare diversitate, aşadar se vor alungi în mod diferit, în funcţie de rezistenţa lor la solicitări.

Cum putem stabili un criteriu de comparare între bare din diverse materiale?

Robert Hooke (1635-1703)

Această problemă a fost rezolvată experimental de Robert Hooke, cel ce a stabilit mărimile caracteristice şi legea care le asociază.

Experienţa I

Considerăm două bare drepte, de aceeaşi secţiune **S** dar de lungimi diferite ($\mathbf{l_1}$, respectiv $\mathbf{l_2}$). Fiecare bară este acţionată de aceeaşi forţă normală **N** datorită căreia au aceeaşi alungire $\mathbf{\Delta l}$.

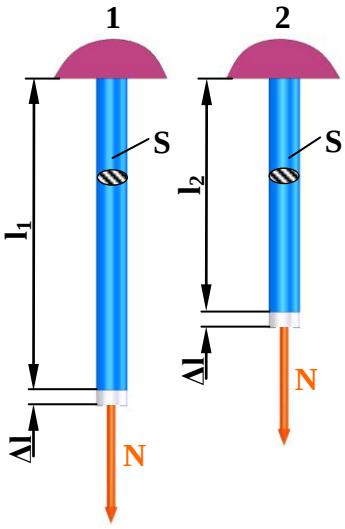


Fig. 10. Experienţa I

Care dintre cele două bare are materialul mai rezistent?

Pentru a le putea compara utilizăm un raport adimensional, numit **alungire specifică** ε [–].

Pentru bara nr. 1 $\qquad \varepsilon_1 = \dfrac{\Delta l}{l_1}$

Pentru bara nr. 2 $\qquad \varepsilon_2 = \dfrac{\Delta l}{l_2}$

Bara nr. 1 este realizată dintr–un material mai rezistent fiindcă are alungirea specifică mai mică.

$$\varepsilon_1 < \varepsilon_2$$

OBSERVAŢIE	Alungirea specifică reprezintă alungirea unităţii de lungime.

Experienţa II

Considerăm două bare drepte, de aceeaşi lungime **l** dar de secţiuni diferite ($\mathbf{S_1}$ respectiv $\mathbf{S_2}$). Fiecare bară este acţionată de aceeaşi forţă normală **N** datorită căreia ele au aceeaşi alungire $\mathbf{\Delta l}$.

Ca şi în cazul precedent, vom încerca o comparaţie:

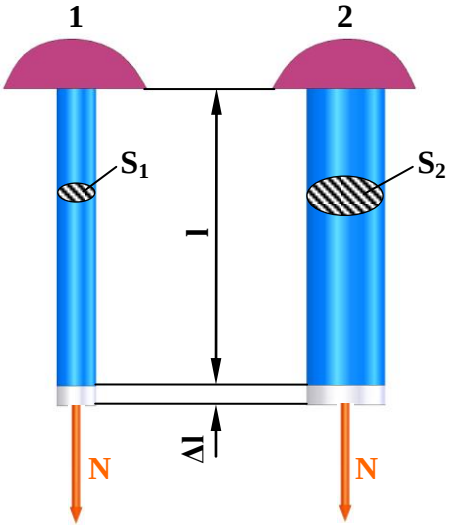


Fig. 11. Experienţa II

Care dintre cele două bare are materialul mai rezistent?

Pentru a le putea compara utilizăm un raport, numit **efort unitar** σ [$\frac{N}{mm^2}$].

Pentru bara nr. 1 Pentru bara nr. 2

$$\sigma_1 = \frac{N}{S_1} \qquad \sigma_2 = \frac{N}{S_2}$$

Bara nr. 1 este realizată dintr–un material mai rezistent fiindcă are eforul unitar mai mare.

$\sigma_1 > \sigma_2$

OBSERVAŢIE	Efortul unitar reprezintă efortul pe unitatea de suprafaţă.

Putem compara bare drepte de aceeaşi secţiune prin alungirea specifică ε şi bare de aceeaşi lungime prin efortul unitar σ.

Pentru a compara bare indiferent de dimensiuni, de fapt pentru a compara materiale, trebuie să găsim o legătură între ε şi σ.

OBSERVAŢII	- Lungimea iniţială şi secţiunea (la deformaţii mici) sunt mărimi constante. - Unei forţe normale anumite N îi corespunde o anumită alungire Δl. Altfel exprimat, unui anumit efort unitar σ îi corespunde o anumită alungire specifică ε. Perechile de valori pot fi reprezentate grafic, într–un sistem de axe.

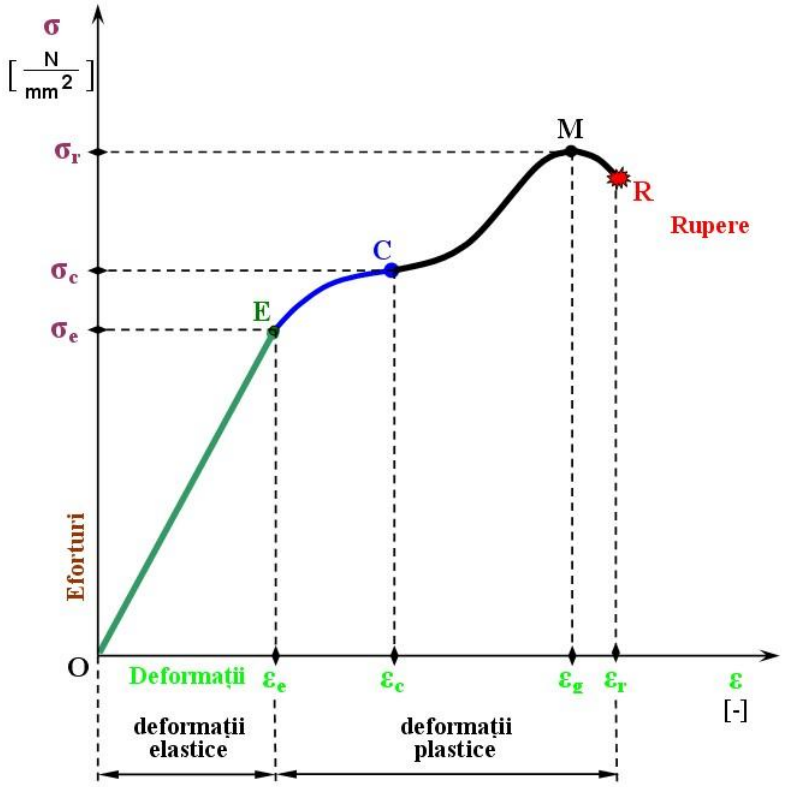


Fig. 12. Curba caracteristică a materialului

Diagrama care rezultă prin încărcarea treptată a barei (până la **rupere**) se numeşte **curba caracteristică a materialului**.

Ea este compusă din mai multe zone:

- **OE** este zona de deformare elastică

  E – punctul în care se termină elasticitatea

*În această zonă bara descărcată revine la lungimea iniţială (**funcţionare în domeniul elastic**)*

- **EC este zona de curgere**

  C – punctul până la care alungirea creşte sub sarcină constantă (σ_c)

- **CM este zona de întărire**

  M – punctul la care corespunde efortul unitar maxim (rezistenţa la rupere) σ_r

- **MR este zona de gâtuire şi rupere**

  R – punctul la care bara se rupe; el dă alungirea specifică la rupere ε_r

*În intervalul ER bara descărcată are lungime mai mare decât lungimea iniţială (**funcţionare în domeniul plastic**)*

OBSERVAŢII	Curba caracteristică este specifică fiecărui material; ea poate avea forme diverse. Putem clasifica materialele în funcţie de comportare astfel: ○ **după comportarea sub sarcini:** – materiale elastice – materiale plastice – materiale elastoplastice (parţial elastice, parţial plastice) ○ **după mărimea deformaţiilor:** – materiale tenace – au deformaţii plastice mari înainte de a se rupe – materiale fragile (casante) – au deformaţii mici înainte de a se rupe

Din curba caracteristică a unui material ne interesează zona de deformare elastică, în care dorim să funcţioneze construcţiile tehnice. Aceasta este o dreaptă, pentru care putem scrie ecuaţia:

$$\frac{\sigma}{\varepsilon} = \text{constant}$$

Constanta se notează cu **E** şi se numeşte modul de elasticitate longitudinală. Se măsoară, ca şi efortul unitar, în $[\frac{N}{mm^2}]$.

$$\boxed{\frac{\sigma}{\varepsilon} = E} \quad \text{sau} \quad \boxed{\sigma = \varepsilon \cdot E} \qquad \boxed{\textbf{Legea lui Hooke}}$$

Curba fiind caracteristică fiecărui material, rezultă că şi modulul de elasticitate longitudinală este caracteristic fiecărui material.

OBSERVAŢII	Curba caracteristică şi legea lui Hooke au fost deduse printr–un experiment de întindere. Se pot obţine alte curbe şi alte module de elasticitate prin încercări de compresiune, torsiune etc.

	Unele materiale nu respectă legea lui Hooke (nu au porţiunea rectilinie **0–E**). În urma încercărilor se obţin **caracteristicile mecanice** ale materialelor. Efortul unitar reprezintă efortul pe unitatea de suprafaţă.

IV. REZISTENŢE ADMISIBILE ŞI COEFICIENŢI DE SIGURANŢĂ

IV. 1. Mărimi utilizate

Simbolul	Denumirea	Unitatea de măsură
ε_a	alungirea specifică admisibilă	–
ε_e	alungirea specifică elastică	–
ε_c	alungirea specifică de curgere	–
ε_g	alungirea specifică de gâtuire	–
ε_r	alungirea specifică de rupere	–
σ_a	efortul unitar admisibil (rezistenţa admisibilă)	$\frac{N}{mm^2}$
σ_e	efortul unitar elastic	$\frac{N}{mm^2}$
σ_c	efortul unitar la curgere	$\frac{N}{mm^2}$
σ_r	efortul unitar la rupere	$\frac{N}{mm^2}$
C_c	coeficientul de siguranţă faţă de limita de curgere	–
C_r	coeficientul de siguranţă faţă de rezistenţa la rupere	–

IV. 2. Generalităţi

Considerăm curba caracteristică la întindere pentru un material metalic uzual – oţel carbon pentru construcţii – cu punctele cunoscute.

Ne interesează domeniul elastic, în care dorim să funcţioneze construcţiile tehnice.

Presupunem o piesă executată din oţel carbon pentru construcţii şi ne întrebăm dacă materialul poate fi solicitat până la valoarea σ_e sau trebuie să ne limităm exploatarea la o valoare mai mică.

Răspunsul poate fi dat numai cunoscând condiţiile concrete de funcţionare; este însă evident că nu vom depăşi limita de elasticitate.

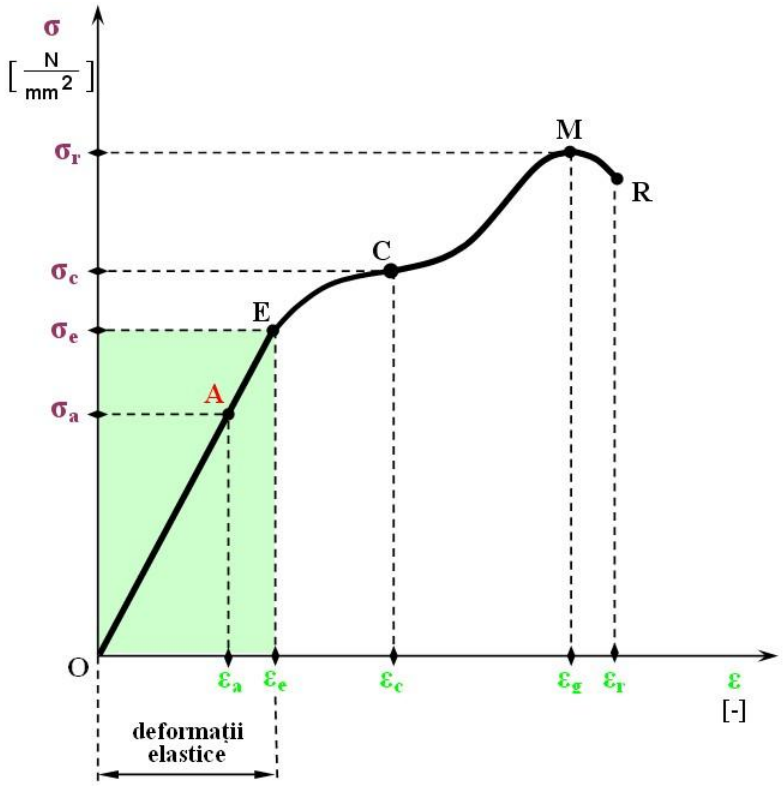


Fig. 13. Zona utilă a curbei caracteristice

În practică se dau valori convenţionale maxim admisibile, **mai mici** decât limita de elasticitate. Aceste valori se numesc rezistenţe admisibile (σ_a) şi sunt reprezentate pe curba lui Hooke prin punctul admisibil **A** [σ_a, ε_a].

Aşadar, putem solicita un material numai până la punctul admisibil.

Se obişnuieşte să se utilizeze coeficienţi care raportează rezistenţa admisibilă la alte valori de pe curba caracteristică.

$$C_c = \frac{\sigma_c}{\sigma_a}$$ pentru materiale tenace

$$C_r = \frac{\sigma_r}{\sigma_a}$$ pentru materiale fragile

Ei se numesc coeficienţi de siguranţă şi arată de câte ori este mai mică rezistenţa admisibilă faşă de valoarea de referinţă.

Observaţii

Pentru proiectare trebuie să cunoaştem:

- Fie coeficientul de siguranţă şi valoarea de referinţă (σ_c sau σ_r)
- Fie rezistenţa admisibilă

În calculele de rezistenţa materialelor putem urma două metode:

- Metoda rezistenţei admisibile (metoda clasică)
- Metoda coeficientului de siguranţă

Alegerea coeficientului de siguranţă necesită cunoaşterea valorii de referinţă (σ_c sau σ_r).

Coeficientul de siguranţă este cu atât mai mare cu cât:

- datele despre material sunt mai puţine
- piesa este mai importantă

Tabelul nr.1

Materialul		Constante de elasticitate		Caracteristici mecanice		Rezistenţa la:				
		longitudinală	transversală	Rezistenţa la rupere	Limita de curgere	Întindere	Compresiune	Forfecare	Încovoiere	Răsucire
		E	G	σ_r	σ_c	σ_{at}	σ_{ac}	τ_{af}	σ_{ai}	τ_{ar}
		N/mm^2	N/mm^2	N/mm^2	N/mm^2	N/mm^2	N/mm^2	N/mm^2	N/mm^2	N/mm^2
Oţeluri carbon	**OL–37**	205.000	81.000	370–450	210–240	120–140	120–140	95–110	135–160	75–85
	OL–42	205.000	81.000	420–500	230–260	130–150	130–150	105–120	150–170	80–90
	OL–50	205.000	81.000	500–620	270–290	150–180	150–180	120–140	170–205	90–105
	OL–70	205.000	81.000	min. 700	340–360	210–250	210–250	165–200	240–285	125–150
Fonte	**Fc 20**	120.000	45.000	230	–	60–80	150–200	–	–	70–95
	Fc 30	120.000	45.000	330	–	90–110	225–275	–	–	105–130
	Fgn 45–5	120.000	45.000	450	320	150–200	375–500	–	–	195–260
Aliaje neferoase	**Bz 12 T**	115.000	42.000	200	–	40–65	40–65	–	40–65	25–45
	AmT 67	95.000	36.000	180	–	40–65	40–60	–	40–60	25–42
	ATCCu 8	68.000	26.000	120	70	20–30	20–30	15–25	20–30	15–20

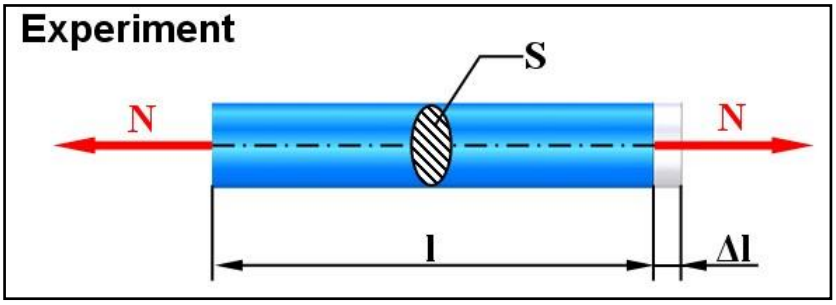
V. ÎNTINDEREA

V. 1. Mărimi utilizate

Simbolul	Denumirea	Unitatea de măsură
l	lungimea iniţială	mm
Δl	alungirea	mm
Δl_a	alungirea admisibilă	mm
Δl_{ef}	alungirea efectivă	mm
S	secţiunea	mm^2
S_{ef}	secţiunea efectivă	mm^2
S_{nec}	secţiunea necesară	mm^2
N	forţa normală	N
N_{cap}	forţa normală capabilă	N
ε	alungirea specifică	–
σ	efortul unitar	$\frac{N}{mm^2}$
σ_{at}	efortul unitar admisibil la tracţiune (rezistenţa admisibilă)	$\frac{N}{mm^2}$
σ_{ef}	efortul unitar efectiv	$\frac{N}{mm^2}$
E	modulul de elasticitate longitudinală	$\frac{N}{mm^2}$
$E \cdot S$	rigiditatea	N

V. 2. Generalităţi

O bară dreaptă este solicitată la întindere când la capetele ei sunt aplicate, în lungul axei, două forţe egale de sens contrar îndreptate spre exterior.



OBSERVAŢIE	Pentru simplificare am reprezentat alungirea numai la un capăt al barei.

Există o asemănare a solicitării la întindere cu experimentul de la capitolul „**Legea lui Hooke**”?

Observaţie

Este acelaşi experiment: în locul capătului fix am reprezentat o **reacţiune**, egală şi de sens contrar cu **acţiunea**.

Prin urmare sunt valabile mărimile prin care am exprimat legea lui Hooke (domeniul elastic).

$$\left.\begin{matrix} l \\ S \\ \Delta l \\ N \end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix} \varepsilon = \dfrac{\Delta l}{l} \\ \sigma = \dfrac{N}{S} \end{matrix}\right\} \quad \frac{\sigma}{\varepsilon} = E$$

Conform ipotezei lui Bernoulli, dacă secţiunile rămân plane, alungirile Δl sunt constante pe suprafaţa secţiunii; în consecinţă şi alungirile specifice ε sunt constante pe toată secţiunea.

Aplicând legea lui Hooke, $\sigma = \varepsilon \cdot E$, rezultă că şi efortul unitar este σ constant pe secţiune.

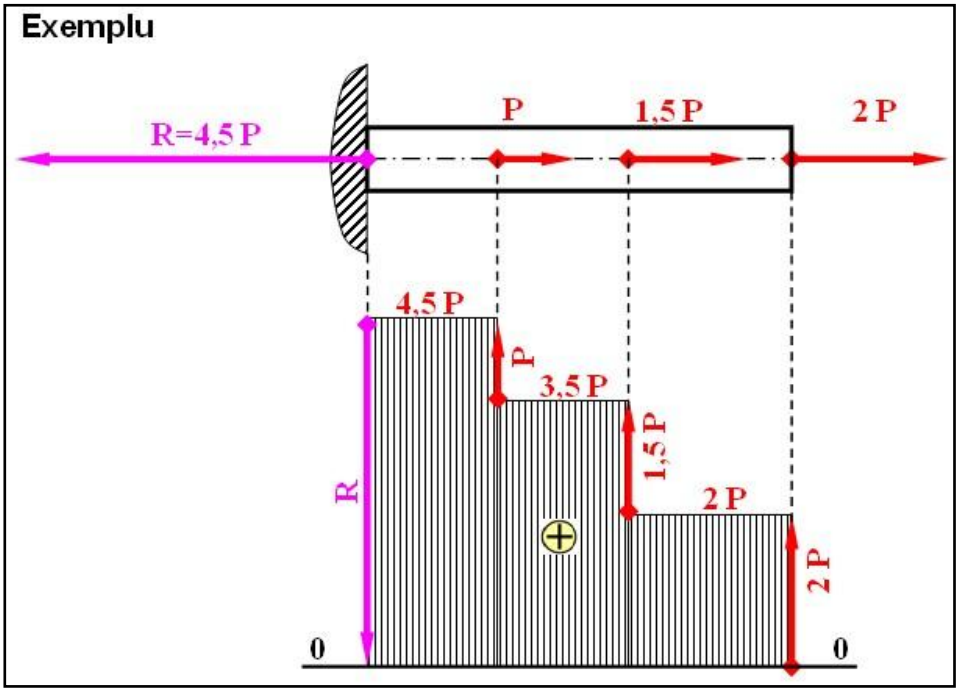
În concluzie: ***efortul unitar σ este constant pe secţiunea unei bare omogene.***

V. 3. Diagrama forţelor normale

Dacă asupra unei bare drepte acţionează mai multe forţe de întindere, este necesară construcţia unei **diagrame a forţelor normale**, care să arate în ce secţiuni aceste forţe sunt mai periculoase.

Reguli de trasare

1. Diagrama se trasează la o scară a forţelor, reprezentate *perpendicular* pe axa barei.
2. Construcţia începe de la un capăt al liniei de referinţă, considerând *pozitive* forţele întâlnite, dacă tind să lungească bara.
3. Într–o secţiune oarecare, forţa axială este dată de suma forţelor situate de o parte a secţiunii (sau suma forţelor de cealaltă parte a secţiunii, cu semn schimbat).



V. 4. Calculul la întindere

Legea lui Hooke este o relaţie între trei mărimi, oricare dintre ele putând fi necunoscută.

Pentru rezolvare, două mărimi trebuie să fie cunoscute.

Apar astfel trei variante de calcul:

- **Dimensionarea**, în care necunoscută este secţiunea barei
- **Verificarea**, în care necunoscut este efortul unitar al secţiunilor unei bare date
- **Determinarea forţei capabile**, în care necunoscută este forţa normală pe care o poate suporta o bară dată

Observaţii

Această variantă de calcul se bazează pe **condiţia de rezistenţă**, adică pe cunoaşterea rezistenţei admisibile.

Dacă scriem legea lui Hooke cu toate mărimile obţinem:

$$\frac{N \cdot l}{S \cdot \Delta l} = E$$

Putem efectua variante de calcul impunând o **condiţie de rigiditate** a barei (limitând alungirea Δl sau alungirea specifică ε).

În rezistenţa materialelor se utilizează în unele cazuri produsul $E \cdot S$, numit **rigiditate**.

V. 5. Mersul calculelor

V. 5. 1. Condiţia de rezistenţă

Dimensionarea

1. Se dă forţa **N**
2. Se alege un material pentru care se determină, din tabelul de materiale sau pe baza coeficientului de siguranţă, rezistenţa admisibilă σ_{at}
3. Se calculează secţiunea necesară, care reprezintă valoarea *minimă* posibilă pentru bară:

$$S_{nec} \geq \frac{N}{\sigma_{at}}$$

4. Valoarea obţinută se converteşte la secţiunea unui profil standardizat, rotunjită prin mărire.

Verificarea

1. Se dau: – forţa **N**
   – secţiunea efectivă a barei S_{ef}
   – materialul barei
2. Se determină, din tabelul de materiale, rezistenţa admisibilă σ_{at}
3. Se calculează efortul unitar efectiv din bară:

$$\sigma_{ef} = \frac{N}{S_{ef}}$$

4. Se compară cele două eforturi unitare

Dacă: – $\sigma_{ef} \leq \sigma_{at}$ bara verifică

– $\sigma_{ef} > \sigma_{at}$ bara nu verifică

Determinarea forţei capabile

1. Se dau: – secţiunea efectivă a barei S_{ef}
   – materialul barei
2. Se determină, din tabelul de materiale sau pe baza coeficientului de siguranţă, rezistenţa admisibilă σ_{at}
3. Se calculează forţa capabilă a barei, care reprezintă valoarea *maximă* posibilă pentru bară:

$$N_{cap} \leq S_{ef} \cdot \sigma_{at}$$

V. 5. 2. Condiţia de rigiditate

Considerăm că se impune o valoare admisibilă pentru alungire – Δl_a, care apare în toate cazurile.

Dimensionarea

1. Se dau: – forţa **N**
   – lungimea barei **l**
2. Se alege un material pentru care se determină, din tabelul de materiale, modulul de elasticitate longitudinală **E**

3. Se calculează secţiunea necesară, care reprezintă valoarea *minimă* posibilă pentru bară:

$$S_{nec} \geq \frac{N \cdot l}{E \cdot \Delta l_a}$$

4. Valoarea obţinută se converteşte la secţiunea unui profil standardizat, rotunjită prin mărire.

Verificarea

1. Se dau: – forţa **N**

– lungimea barei **l**

– secţiunea efectivă a barei Sef

– materialul barei

2. Se determină, din tabelul de materiale, modulul de elasticitate longitudinală **E**

3. Se calculează alungirea efectivă a barei:

$$\Delta l_{ef} = \frac{N \cdot l}{S_{ef} \cdot E}$$

4. Dacă: – $\Delta l_{ef} \leq \Delta l_a$ bara verifică

– **Δlef > Δla** bara nu verifică

Determinarea forţei capabile

1. Se dau: – lungimea barei **l**

– secţiunea efectivă a barei S_{ef}

– materialul barei

2. Se determină, din tabelul de materiale, modulul de elasticitate longitudinală **E**

3. Se calculează forţa capabilă a barei, care reprezintă valoarea *maximă* posibilă pentru bară:

$$N_{cap} \leq \frac{S_{ef} \cdot E \cdot \Delta l_a}{l}$$

V. 6. Sinteza solicitării

Legea lui Hooke (domeniul elastic) $\frac{\sigma}{\varepsilon} = E$ $\frac{N \cdot l}{S \cdot \Delta l} = E$		
Felul calculului	**Condiţia de rezistenţă**	**Condiţia de rigiditate**
Dimensionarea	$S_{nec} \geq \frac{N}{\sigma_{at}}$	$S_{nec} \geq \frac{N \cdot l}{E \cdot \Delta l_a}$
Verificarea	$\sigma_{ef} = \frac{N}{S_{ef}}$	$\Delta l_{ef} = \frac{N \cdot l}{S_{ef} \cdot E}$
Determinarea forţei capabile	$N_{cap} \leq S_{ef} \cdot \sigma_{at}$	$N_{cap} \leq \frac{S_{ef} \cdot E \cdot \Delta l_a}{l}$

V. 7. Aplicaţii

I. ***Să se dimensioneze la întindere o bară solicitată de forţa normală*** $N = 20.000$ **N**

Rezolvare:

Problema se bazează pe condiţia de rezistenţă.

1. Se dă forţa $N = 20.000$ **N**
2. Din Tabelul nr.1 alegem un oţel carbon OL 37, pentru care apreciem $\sigma_{at} = 120 \frac{N}{mm^2}$
3. Se calculează secţiunea necesară, care reprezintă valoarea *minimă* posibilă pentru bară:

$$S_{nec} \geq \frac{20.000}{120}$$

$$S_{nec} > 166,67 \text{ mm}^2$$

4. Stabilim ca secţiunea barei să fie rotundă şi calculăm diametrul necesar:

$$d_{nec} \geq \sqrt{\frac{4 \cdot S_{nec}}{\pi}}$$

$$d_{nec} \geq 14,56 \text{ mm}$$

Semifabricatul din oţel standardizat cel mai apropiat de valoarea calculată (din tabelele de standarde) este oţelul rotund **Ø 15**.

II. ***Să se dimensioneze la întindere o bară din oţel OL 50, de secţiune pătrată, solicitată de forţa normală*** $N = 12.000$ **N,** ***cunoscându–se coeficientul de siguranţă*** $C = 6$

Rezolvare:

Problema se bazează pe condiţia de rezistenţă.

1. Se dă forţa $N = 12.000$ **N**
2. Pentru OL 50, valoarea minimă a rezistenţei la rupere este $\sigma_r = 500 \frac{N}{mm^2}$ (Tabelul nr.1), de unde rezultă rezistenţa admisibilă:

$$\sigma_{at} = \frac{\sigma_r}{C}$$

$$\sigma_{at} = \frac{500}{6} = 83,3 \frac{N}{mm^2}$$

3. Se calculează secţiunea necesară, care reprezintă valoarea *minimă* posibilă pentru bară:

$$S_{nec} \geq \frac{12.000}{83,3}$$

$$S_{nec} > 144 \text{ mm}^2$$

4. Calculăm latura pătratului necesar:

$$l_{nec} \geq \sqrt{S_{nec}}$$

$$l_{nec} \geq 12 \text{mm}$$

III. ***Să se verifice o bară din oţel lat laminat la cald 80x16 STAS 395–77/OL 37 STAS 500–68 solicitată de forţa normală de întindere*** $N = 120.000$ N

Rezolvare:

Problema se bazează pe condiţia de rezistenţă.

1. Cunoaştem forţa normală şi materialul barei dar trebuie să calculăm secţiunea efectivă:

$$S_{ef} = 80 \cdot 16 = 1.280 \text{ mm}^2$$

2. Din Tabelul nr.1 apreciem, pentru OL 37 – $\sigma_{at} = 120 \ \frac{N}{mm^2}$
3. Calculăm efortul unitar efectiv în bară:

$$\sigma_{ef} = \frac{120.000}{1.280}$$

$$\sigma_{ef} = 93,7 \ \frac{N}{mm^2}$$

4. Comparăm cele două eforturi unitare:

$$93,7 < 120$$

Bara verifică.

IV. ***Să se determine forţa normală capabilă a unei ţevi din OL 50, având diametrul exterior*** $D = 40$ ***mm şi grosimea peretelui*** $g = 3$ ***mm.***

Rezolvare:

Problema se bazează pe condiţia de rezistenţă.

1. Cunoaştem materialul barei dar trebuie să calculăm secţiunea efectivă:

$$S_{ef} = \frac{\pi\left(40^2 - 32^2\right)}{4} = 452,39 \text{ mm}^2$$

2. Din Tabelul nr.1 apreciem, pentru OL 50 – $\sigma_{at} = 150 \ \frac{N}{mm^2}$
3. Calculăm forţa normală capabilă:

$$N_{cap} \le 452,39 \cdot 150$$

$$N_{cap} \le 87.890 N$$

V. ***Să se dimensioneze la întindere o bară din aluminiu turnat cu lungimea*** $l = 0,8$ m, ***astfel încât la solicitarea cu o forţă normală*** $N = 60.000$ N ***să nu depăşească alungirea*** $\Delta l_a = 1,5$ mm.

Rezolvare:

Problema se bazează pe condiţia de rigiditate.

1. Se dau: – forţa $N = 60.000$ N

– **lungimea barei** $l = 800$ mm

2. Materialul fiind dat, extragem din tabelul de materiale valoarea modulului de elasticitate longitudinală $E = 68.000 \ \frac{N}{mm^2}$

3. Calculăm secţiunea necesară:

$$S_{nec} \geq \frac{60.000 \cdot 800}{68.000 \cdot 1,5}$$

$$S_{nec} \geq 470,58 \text{ mm}^2$$

4. Stabilim ca secţiunea barei să fie rotundă şi calculăm diametrul necesar:

$$d_{nec} \geq \sqrt{\frac{4 \cdot S_{nec}}{\pi}}$$

$$d_{nec} \geq 14,56 \text{ mm}$$

Semifabricatul din oţel standardizat cel mai apropiat de valoarea calculată (din tabelele de standarde) este aluminiul rotund **Ø 25**.

VI. ***O bară □40 din OL 70 cu lungimea*** **l = 300 mm** ***este solicitată la întindere de forţa normală*** **N = 50.000 N.** ***Să se verifice dacă nu depăşeşte alungirea admisibilă*** Δl_a **= 0,2 mm.**

Rezolvare:

Problema se bazează pe condiţia de rigiditate.

1. Cunoaştem forţa normală, lungimea şi materialul dar trebuie să calculăm secţiunea efectivă:

$$S_{ef} = 40^2 = 1.600 \text{ mm}^2$$

2. Din Tabelul nr.1 scoatem, pentru OL 70, valoarea modulului de elasticitate longitudinală – $E = 205.000 \frac{N}{mm^2}$

3. Calculăm alungirea efectivă a barei:

$$\Delta l_{ef} = \frac{50.000 \cdot 300}{1.600 \cdot 205.000}$$

$$\Delta l_{ef} = 0,04 \text{ mm}$$

4. Comparăm cele două alungiri:

$$0,04 < 0,2$$

Bara verifică.

VII. ***Să se determine forţa normală la întindere de care este capabilă o bară Ø80 din bronz Bz12T lungă de*** **1,3 m,** ***astfel ca să nu depăşească alungirea de*** **0,4 mm.**

Rezolvare:

Problema se bazează pe condiţia de rigiditate.

1. Cunoaştem lungimea şi materialul barei dar trebuie să calculăm secţiunea efectivă:

$$S_{ef} = \frac{\pi \cdot 80^2}{4}$$

$$S_{ef} = 5.026,55 \text{ mm}^2$$

2. Din Tabelul nr.1 scoatem, pentru Bz12T, valoarea modulului de elasticitate longitudinală $E = 115.000 \frac{N}{mm^2}$

3. Calculăm forţa normală capabilă:

$$\mathbf{N_{cap} \leq \frac{5.026,55 \cdot 115.000 \cdot 0,4}{1.200}}$$

$$\mathbf{N_{cap} \leq 192.680\,N}$$

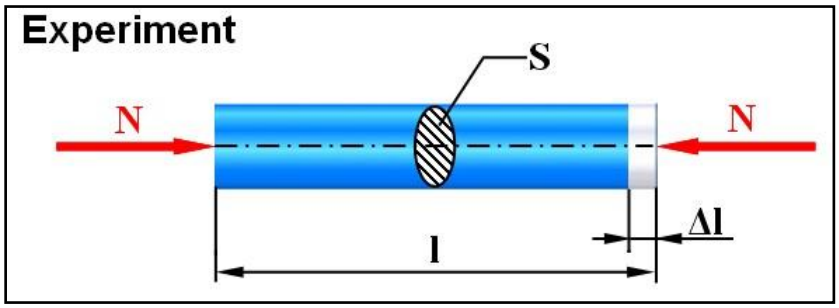
VI. COMPRESIUNEA

VI. 1. Mărimi utilizate

Simbolul	Denumirea	Unitatea de măsură
l	lungimea iniţială	mm
Δl	scurtarea	mm
Δl_a	scurtarea admisibilă	mm
Δl_{ef}	scurtarea efectivă	mm
S	secţiunea	mm^2
S_{ef}	secţiunea efectivă	mm^2
S_{nec}	secţiunea necesară	mm^2
N	forţa normală	N
N_{cap}	forţa normală capabilă	N
ε	scurtarea specifică	–
σ	efortul unitar	$\frac{N}{mm^2}$
σ_{ac}	efortul unitar admisibil la compresiune (rezistenţa admisibilă)	$\frac{N}{mm^2}$
σ_{ef}	efortul unitar efectiv	$\frac{N}{mm^2}$
E	modulul de elasticitate longitudinală	$\frac{N}{mm^2}$
$E \cdot S$	rigiditatea	N

VI. 2. Generalităţi

O bară dreaptă este solicitată la compresiune când la capetele ei sunt aplicate, în lungul axei, două forţe egale de sens contrar îndreptate spre interior.



Observaţie

Solicitarea la compresiune este caracterizată, ca şi solicitarea la întindere, de forţe axiale (normale).

Ambele solicitări pot fi caracterizate prin aceeaşi definiţie:

O bară dreaptă este solicitată la întindere sau compresiune când asupra ei sunt aplicate, în lungul axei, forţe normale.

Ca atare sunt valabile generalităţile de la întindere, cu precădere legea lui Hooke (domeniul elastic).

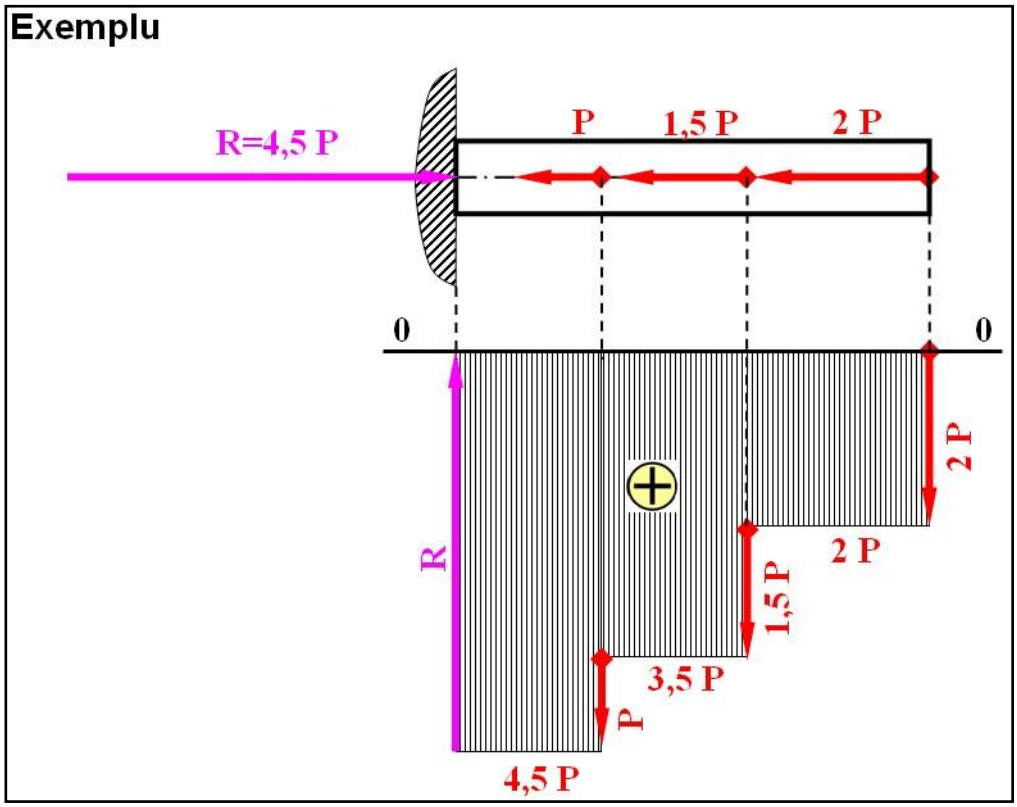
$$\left.\begin{matrix} l \\ S \\ \Delta l \\ N \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} \varepsilon = \dfrac{\Delta l}{l} \\ \sigma = \dfrac{N}{S} \end{matrix}\right\} \frac{\sigma}{\varepsilon} = E$$

VI. 3. Diagrama forţelor normale

Dacă asupra unei bare drepte acţionează mai multe forţe de compresiune, este necesară construcţia unei **diagrame a forţelor normale**, care să arate în ce secţiuni aceste forţe sunt mai periculoase.

Reguli de trasare

Sunt aceleaşi ca şi pentru solicitarea de întindere, cu precizarea că forţele care tind să scurteze bara se consideră **negative**.

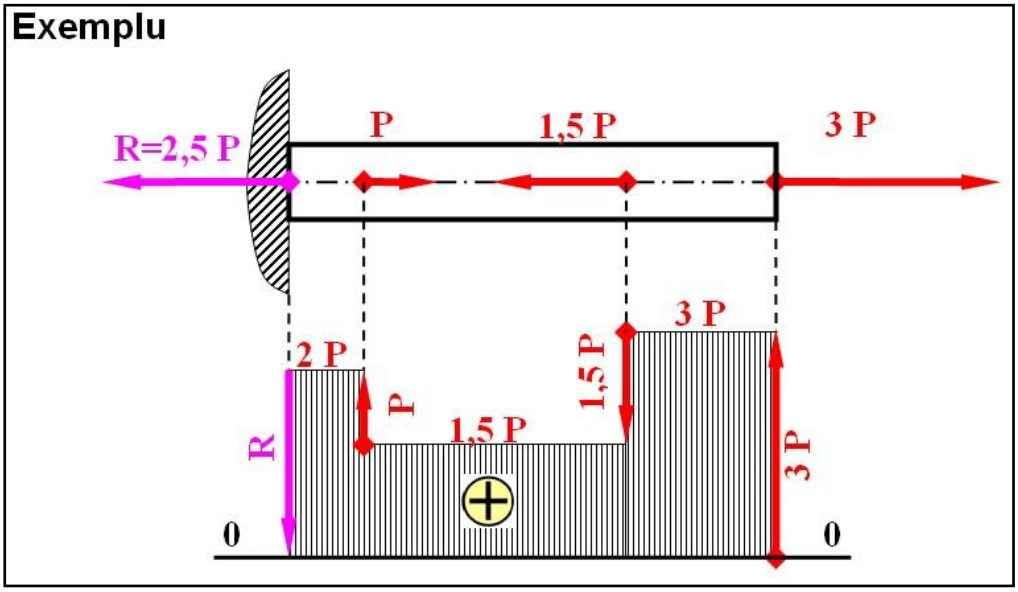


Observaţie

În cazul general de solicitare a barelor cu forţe axiale avem şi forţe de întindere şi forţe de compresiune.

Diagrama forţelor normale se trasează în conformitate cu aceleaşi reguli enunţate la capitolul „**Întinderea**”.

Exemplu



VI. 4. Calculul la compresiune

Sunt valabile variantele de calcul de la întindere:

- **Dimensionarea**, în care necunoscută este secţiunea barei
- **Verificarea**, în care necunoscut este efortul unitar al secţiunilor unei bare date
- **Determinarea forţei capabile**, în care necunoscută este forţa normală pe care o poate suporta o bară dată

VI. 5. Mersul calculelor

VI. 5. 1. Condiţia de rezistenţă

Dimensionarea

1. Se dă forţa **N**
2. Se alege un material pentru care se determină, din tabelul de materiale, rezistenţa admisibilă σ_{ac}
3. Se calculează secţiunea necesară, care reprezintă valoarea *minimă* posibilă pentru bară:

$$S_{nec} \geq \frac{N}{\sigma_{ac}}$$

4. Valoarea obţinută se converteşte la secţiunea unui profil standardizat, rotunjită prin mărire.

Verificarea

1. Se dau: – forţa **N**

– secţiunea efectivă a barei $\mathbf{S_{ef}}$

– materialul barei

2. Se determină, din tabelul de materiale, rezistenţa admisibilă σ_{ac}
3. Se calculează efortul unitar efectiv din bară:

$$\sigma_{ef} = \frac{N}{S_{ef}}$$

4. Se compară cele două eforturi unitare

Dacă: – $\sigma_{ef} \leq \sigma_{ac}$ bara verifică

– $\sigma_{ef} > \sigma_{ac}$ bara nu verifică

Determinarea forţei capabile

1. Se dau: – secţiunea efectivă a barei $\mathbf{S_{ef}}$

– materialul barei

2. Se determină, din tabelul de materiale, rezistenţa admisibilă σ_{ac}
3. Se calculează forţa capabilă a barei, care reprezintă valoarea *maximă* posibilă pentru bară:

$$N_{cap} \leq S_{ef} \cdot \sigma_{ac}$$

VI. 5. 2. Condiţia de rigiditate

Considerăm că se impune o valoare admisibilă pentru scurtare – Δl_a, care apare în toate cazurile.

Dimensionarea

1. Se dau: – forţa **N**

– lungimea barei **l**

2. Se alege un material pentru care se determină, din tabelul de materiale, modulul de elasticitate longitudinală **E**
3. Se calculează secţiunea necesară, care reprezintă valoarea *minimă* posibilă pentru bară:

$$S_{nec} \geq \frac{N \cdot l}{E \cdot \Delta l_a}$$

4. Valoarea obţinută se converteşte la secţiunea unui profil standardizat, rotunjită prin mărire.

Verificarea

1. Se dau: – forţa **N**

– lungimea barei **l**

– secţiunea efectivă a barei $\mathbf{S_{ef}}$

– materialul barei

2. Se determină, din tabelul de materiale, modulul de elasticitate longitudinală **E**
3. Se calculează scurtarea efectivă a barei:

$$\Delta l_{ef} = \frac{N \cdot l}{S_{ef} \cdot E}$$

4. Dacă: – $\Delta l_{ef} \leq \Delta l_a$ bara verifică

– $\Delta l_{ef} > \Delta l_a$ bara nu verifică

Determinarea forţei capabile

1. Se dau: – lungimea barei l

– secţiunea efectivă a barei S_{ef}

– materialul barei

2. Se determină, din tabelul de materiale, modulul de elasticitate longitudinală **E**
3. Se calculează forţa capabilă a barei, care reprezintă valoarea *maximă* posibilă pentru bară:

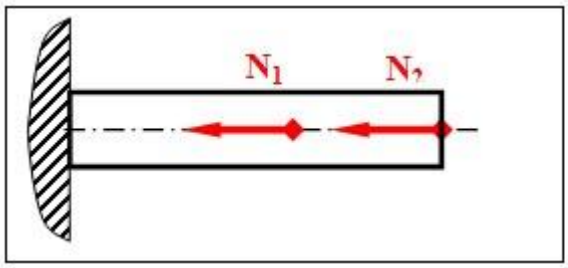
$$N_{cap} \leq \frac{S_{ef} \cdot E \cdot \Delta l_a}{l}$$

VI. 6. Sinteza solicitării

Legea lui Hooke (domeniul elastic)	$\frac{\sigma}{\varepsilon} = E$	$\frac{N \cdot l}{S \cdot \Delta l} = E$
Felul calculului	**Condiţia de rezistenţă**	**Condiţia de rigiditate**
Dimensionarea	$S_{nec} \geq \frac{N}{\sigma_{ac}}$	$S_{nec} \geq \frac{N \cdot l}{E \cdot \Delta l_a}$
Verificarea	$\sigma_{ef} = \frac{N}{S_{ef}}$	$\Delta l_{ef} = \frac{N \cdot l}{S_{ef} \cdot E}$
Determinarea forţei capabile	$N_{cap} \leq S_{ef} \cdot \sigma_{ac}$	$N_{cap} \leq \frac{S_{ef} \cdot E \cdot \Delta l_a}{l}$

VI. 7. Aplicaţii

I. ***Să se dimensioneze la compresiune o bară solicitată ca în figura alăturată de forţele:***

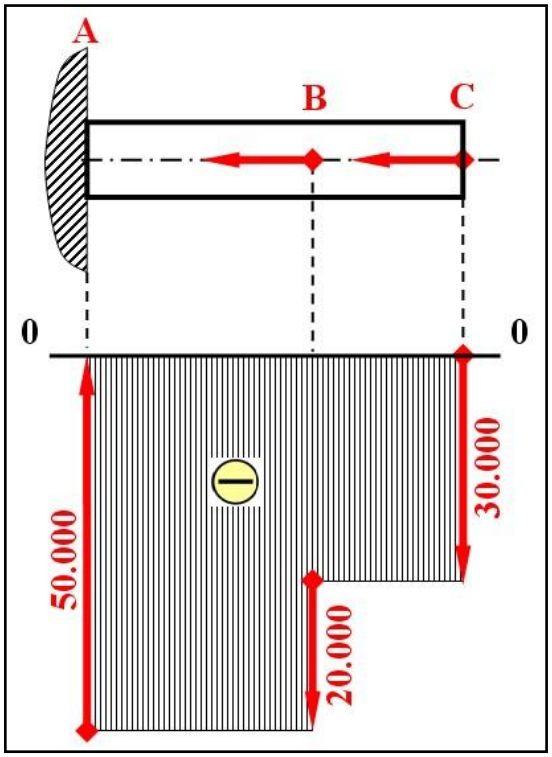


$N_1 = 20.000$ N

$N_2 = 30.000$ N

Rezolvare:

Problema se bazează pe condiţia de rezistenţă. Deoarece avem mai multe forţe, vom trasa diagrama forţelor normale pentru a vedea ce forţe acţionează în diferitele secţiuni ale barei.



Pe porţiunea **AB** acţionează dă forţa de compresiune de **50.000 N** iar pe porţiunea **BC** forţa de compresiune de **30.000 N.**

Este mai economic să dimensionăm bara în trepte – secţiunea S_1 pentru porţiunea **AB** şi secţiunea S_2 pentru porţiunea **BC**.

1. Din Tabelul nr.1 alegem o fontă cenuşie Fc 20, pentru care apreciem $\sigma_{ac} = 160 \ \frac{N}{mm^2}$
2. Se calculează secţiunile necesare, care reprezintă valori minime posibile pentru bară:

$$S_{1nec} \geq \frac{50.000}{160} \rightarrow S_{1nec} \geq 312,5 \ mm^2$$

$$S_{2nec} \geq \frac{30.000}{160} \rightarrow S_{2nec} \geq 187,5 \ mm^2$$

3. Stabilim ca secţiunile barei să fie rotunde şi calculăm diametrele necesare:

$$d_{1nec} \geq \sqrt{\frac{4 \cdot 312,5}{\pi}} \rightarrow d_{1nec} \geq 19,94 \quad mm$$

$$d_{2nec} \geq \sqrt{\frac{4 \cdot 187,5}{\pi}} \rightarrow d_{2nec} \geq 15,45 \quad mm$$

Rotunjim la valorile standardizate cele mai apropiate şi obţinem valorile finale:

d_1 = 20 mm

d_2 = 16 mm

II. ***Să se verifice dacă o ţeavă din Ol 42, având diametrul exterior D = 30 mm şi grosimea peretelui g = 4 mm poate suporta forţa de compresiune de 20.000 N***

Rezolvare:

Problema se bazează pe condiţia de rezistenţă.

1. Cunoaştem forţa normală şi materialul barei dar trebuie să calculăm secţiunea efectivă:

$$S_{ef} = \frac{\pi\left(30^2 - 22^2\right)}{4} = 104 \, mm^2$$

2. Din Tabelul nr.1 alegem un oţel carbon OL 37, pentru care apreciem $\sigma_{ac} = 140 \ \frac{N}{mm^2}$
3. Calculăm efortul unitar efectiv în bară:

$$\sigma_{ef} = \frac{20.000}{104} \rightarrow \sigma_{ef} = 192,3 \, mm^2$$

4. Comparăm cele două eforturi unitare:

192,3 > 140

Bara **nu** verifică.

III. ***Să se determine forţa normală capabilă a unei ţevi pătrate din OL 37, având latura exterioară l = 40 mm şi grosimea peretelui g = 2 mm.***

Rezolvare:

Problema se bazează pe condiţia de rezistenţă.

1. Cunoaştem materialul barei dar trebuie să calculăm secţiunea efectivă:

$$S_{ef} = 40^2 - 36^2 = 304 \text{ mm}^2$$

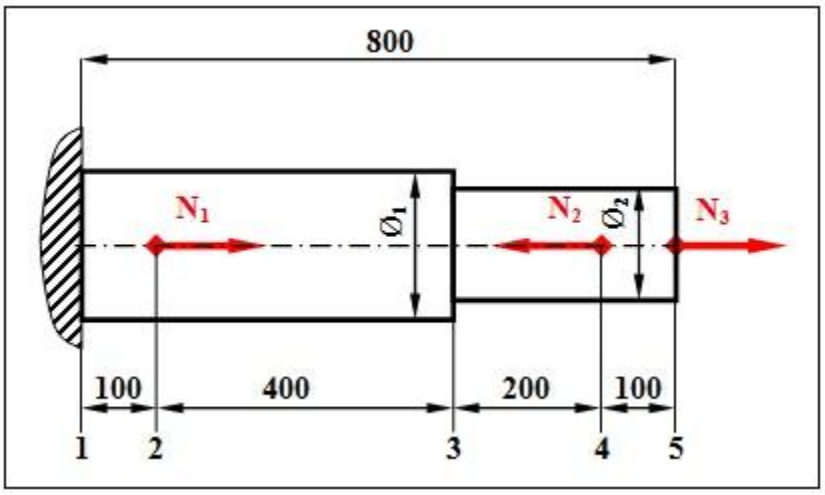
2. Din Tabelul nr.1 alegem un oţel carbon OL 37, pentru care apreciem $\sigma_{ac} = 120 \frac{N}{mm^2}$

3. Calculăm forţa normală de compresiune capabilă:

$$N_{cap} \le 304 \cdot 120$$

$$N_{cap} \le 36.480 \text{ N}$$

IV. ***Se dă bara de oţel din figură cu datele alăturate:***



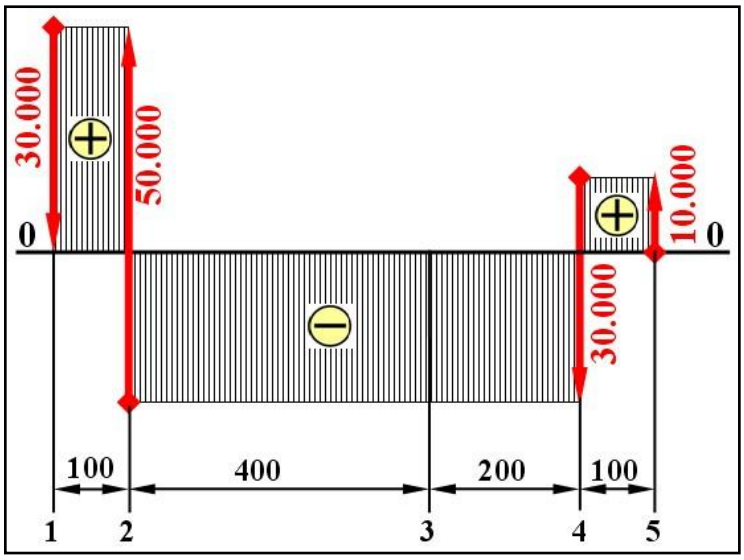
$N_1 = 50.000$ N
$N_2 = 30.000$ N
$N_3 = 10.000$ N
$Ø_1 = 30$ mm
$Ø_2 = 20$ mm

Se cere:

a. Să se verifice bara ştiind că $\sigma_{at} = \sigma_{ac} = 100 \frac{N}{mm^2}$

b. Să se calculeze deformaţia totală a barei

Rezolvare:



Deoarece avem mai multe forţe normale vom trasa diagrama forţelor normale pentru a vedea ce solicitări avem în diferitele secţiuni ale barei.

a. Problema se bazează pe condiţia de rezistenţă.

1. Calculăm secţiunile efective:

$$S_{1ef} = \frac{\pi \cdot 30^2}{4} = 706,8 \text{ mm}^2$$

$$S_{2ef} = \frac{\pi \cdot 20^2}{4} = 314,1 \text{ mm}^2$$

2. Efortul unitar admisibil este $\sigma_a = 100 \frac{N}{mm^2}$ (acelaşi pentru întindere şi compresiune)

3. Calculăm eforturile unitare efective în secţiunile mai periculoase:

Pe intervalul **1 – 2**: $\sigma_{12ef} = \frac{30.000}{706,8} = 42,4 \frac{N}{mm^2}$

Pe intervalul **3 – 4**: $\sigma_{34ef} = \frac{20.000}{314,1} = 63,6 \frac{N}{mm^2}$

4. Comparând eforturile unitare efective cu efortul unitar admisibil se constată:

42,4 < 100

63,6 < 100

Bara verifică.

b. Problema se bazează pe condiţia de rigiditate. Pentru a calcula deformaţia totală a barei trebuie să însumăm deformaţiile pe intervale:

$$\Delta l = \frac{10.000}{205.000}\left(\frac{100 - 400}{314,1} - \frac{800 - 300}{706,8}\right)$$

$$\Delta l = -0,083 \text{ mm}$$

$$\Delta l = \frac{10.000 \cdot 100}{E \cdot S_2} - \frac{20.000 \cdot 200}{E \cdot S_2} - \frac{20.000 \cdot 400}{E \cdot S_1} + \frac{30.000 \cdot 100}{E \cdot S_1}$$

OBSERVAŢIE	Alungirile sunt pozitive, scurtările sunt negative.

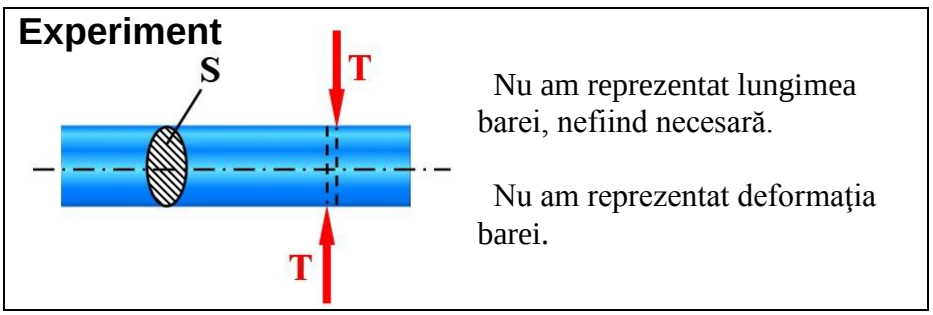
VII. FORFECAREA

VII. 1. Mărimi utilizate

Simbolul	Denumirea	Unitatea de măsură
t	distanţa dintre forţele tăietoare	mm
ΔS	lunecarea	mm
ΔS_a	lunecarea admisibilă	mm
S	secţiunea	mm^2
S_{ef}	secţiunea efectivă	mm^2
S_{nec}	secţiunea necesară	mm^2
γ	lunecarea specifică	radiani
T	forţa tăietoare	N
τ	efortul unitar transversal	$\frac{N}{mm^2}$
τ_{af}	efortul unitar admisibil la forfecare (rezistenţa admisibilă)	$\frac{N}{mm^2}$
τ_{ef}	efortul unitar transversal efectiv	$\frac{N}{mm^2}$
G	modulul de elasticitate transversală	$\frac{N}{mm^2}$
σ_{ef}	efortul unitar efectiv	$\frac{N}{mm^2}$
E	modulul de elasticitate longitudinală	$\frac{N}{mm^2}$
$E \cdot S$	rigiditatea	N

VII. 2. Generalităţi

O bară dreaptă este solicitată la forfecare când pe ea sunt aplicate, în plan transversal, două forţe egale, paralele şi de sens contrar, la foarte mică distanţă una de cealaltă.

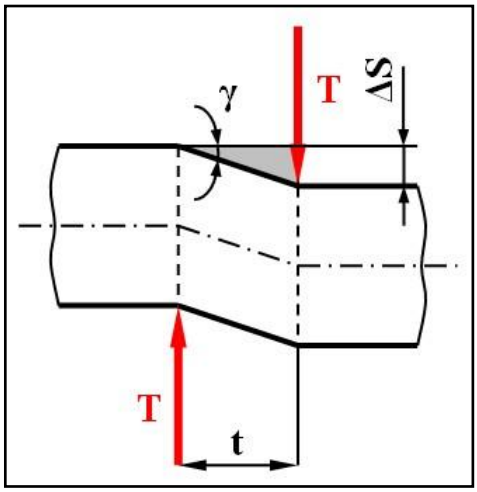


Observaţie

Solicitarea de forfecare se produce la piese de secţiune mică, circulară sau inelară, la care putem aprecia că nu apar decât eforturi transversale, constante pe toată secţiunea.

Pentru a scrie legea lui Hooke vom stabili efortul unitar şi deformaţia specifică; aceste mărimi nu mai pot fi cele de la întindere – compresiune.

Ca să ilustrăm legătura dintre efort şi deformaţie reprezentăm la scară mărită o zonă supusă solicitării de forfecare.



Ca şi la întindere, efortul unitar transversal este dat de raportul între forţă (tăietoare) şi secţiune.

$$\tau = \frac{T}{S}$$

Deformaţia este dată de mărimea **ΔS – lunecarea** unei secţiuni faţă de cealaltă secţiune.

Raportul adimensional care permite compararea deformaţiilor este dat de unghiul **γ**, numit **lunecare specifică**.

În triunghiul dreptunghic format prin deformare avem:

$$tg\gamma = \frac{\Delta S}{t}$$

Pentru unghiuri mici (ipoteza deformaţiilor mici) tangentele sunt aproximativ egale cu unghiurile exprimate în radiani:

$$tg\gamma \cong \gamma \ [rad] \quad \rightarrow \quad \gamma = \frac{\Delta S}{t}$$

Putem folosi schema de la întindere – compresiune:

$$\left.\begin{matrix} t \\ S \\ \Delta S \\ T \end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix} \gamma = \frac{\Delta S}{t} \\ \gamma = \frac{T}{S} \end{matrix}\right\} \quad \frac{\tau}{\gamma} = G$$

G – modulul de elasticitate transversală $[\frac{N}{mm^2}]$

VII. 3. Calculul la forfecare

Sunt valabile variantele de calcul de la întindere:

- **Dimensionarea**, în care necunoscută este secţiunea barei
- **Verificarea**, în care necunoscut este efortul unitar al secţiunilor unei bare date
- **Determinarea forţei capabile**, în care necunoscută este forţa normală pe care o

poate suporta o bară dată

cu variantele de calcul:

- **Condiţia de rezistenţă**
- **Condiţia de rigiditate**

> **Observaţie**
>
> La calculul de forfecare apare frecvent problema **depăşirii** rezistenţei la rupere, pentru prelucrarea pieselor prin **ştanţare** sau **debitare**. În aceste cazuri se caută forţa tăietoare capabilă pentru aceste operaţii.

VII. 4. Mersul calculelor

VII. 4. 1. Condiţia de rezistenţă

Dimensionarea

1. Se dă forţa $\mathbf{T}$
2. Se alege un material pentru care se determină, din tabelul de materiale, rezistenţa admisibilă τ_{af}
3. Se calculează secţiunea necesară, care reprezintă valoarea *minimă* posibilă pentru bară:
$$S_{nec} \geq \frac{T}{\tau_{af}}$$
4. Valoarea obţinută se converteşte la secţiunea unui profil standardizat, rotunjită prin mărire.

Verificarea

1. Se dau: – forţa $\mathbf{T}$
– secţiunea efectivă a barei $\mathbf{S_{ef}}$
– materialul barei
2. Se determină, din tabelul de materiale, rezistenţa admisibilă τ_{af}
3. Se calculează efortul unitar efectiv din bară:
$$\tau_{ef} = \frac{T}{S_{ef}}$$
4. Se compară cele două eforturi unitare

Dacă: – $\tau_{ef} \leq \tau_{af}$ bara verifică

– $\tau_{ef} > \tau_{af}$ bara nu verifică

Determinarea forţei capabile

1. Se dau: – secţiunea efectivă a barei $\mathbf{S_{ef}}$
– materialul barei
2. Se determină, din tabelul de materiale, rezistenţa admisibilă τ_{af}
3. Se calculează forţa capabilă a barei, care reprezintă valoarea *maximă* posibilă pentru bară:
$$T_{cap} \leq S_{ef} \cdot \tau_{af}$$

VII. 4. 2. Condiţia de rigiditate

Considerăm că se impune o valoare admisibilă pentru lunecare – ΔS_a, care apare în toate cazurile.

Dimensionarea

1. Se dau: – forţa **T**

   – distanţa dintre forţe **t**

2. Se alege un material pentru care se determină, din tabelul de materiale, modulul de elasticitate transversală **G**

3. Se calculează secţiunea necesară, care reprezintă valoarea *minimă* posibilă pentru bară:

$$S_{nec} \geq \frac{T \cdot t}{G \cdot \Delta S_a}$$

4. Valoarea obţinută se converteşte la secţiunea unui profil standardizat, rotunjită prin mărire.

Verificarea

1. Se dau: – forţa **T**

   – distanţa dintre forţe **t**

   – secţiunea efectivă a barei S_{ef}

   – materialul barei

2. Se determină, din tabelul de materiale, modulul de elasticitate transversală **G**

3. Se calculează scurtarea efectivă a barei:

$$\Delta S_{ef} = \frac{T \cdot t}{S_{ef} \cdot G}$$

4. Dacă: – $\Delta S_{ef} \leq \Delta S_a$ bara verifică

   _ $\Delta S_{ef} > \Delta S_a$ bara nu verifică

Determinarea forţei capabile

1. Se dau: – distanţa dintre forţe **t**

   – secţiunea efectivă a barei S_{ef}

   – materialul barei

2. Se determină, din tabelul de materiale, modulul de elasticitate transversală **G**

3. Se calculează forţa capabilă a barei, care reprezintă valoarea *maximă* posibilă pentru bară:

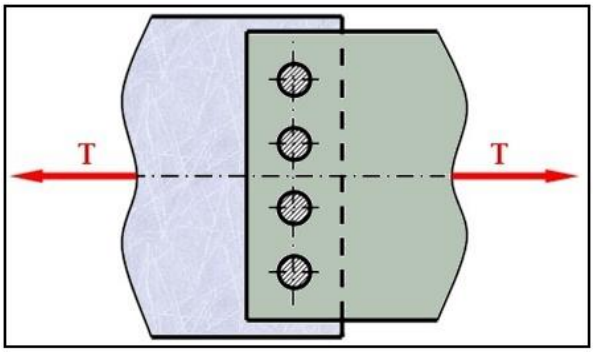
$$N_{cap} \leq \frac{S_{ef} \cdot G \cdot \Delta S_a}{t}$$

VII. 5. Sinteza solicitării

Legea lui Hooke (domeniul elastic) $\frac{\tau}{\gamma}=G$ $\frac{T\cdot t}{S\cdot \Delta S}=G$		
Felul calculului	**Condiţia de rezistenţă**	**Condiţia de rigiditate**
Dimensionarea	$S_{nec} \geq \frac{T}{\tau_{af}}$	$S_{nec} \geq \frac{T\cdot t}{G\cdot \Delta S_a}$
Verificarea	$\tau_{ef} = \frac{T}{S_{ef}} \leq \tau_{af}$	$\Delta S_{ef} = \frac{T\cdot t}{S_{ef}\cdot G} \leq \Delta S_a$
Determinarea forţei capabile	$T_{cap} \leq S_{ef}\cdot \tau_{af}$	$T_{cap} \leq \frac{S_{ef}\cdot G\cdot \Delta S_a}{t}$

VII. 6. Aplicaţii

I. ***Să se dimensioneze niturile îmbinării din figură cunoscându–se că forţa*** $T = 20.000$ **N**



Rezolvare:

Problema se bazează pe condiţia de rezistenţă.

1. Forţa tăietoare este $T = 20.000$ **N**
2. Alegem pentru nituri, din Tabelul nr. 1 oţelul carbon OL 37, pentru care apreciem rezistenţa

$$\tau_{af} = 100 \ \frac{N}{mm^2}$$

3. Calculăm secţiunea necesară:

$$S_{nec} \geq \frac{20.000}{100}$$

$$S_{nec} \geq 200\ mm^2$$

Deoarece avem patru nituri, calculăm secţiunea necesară unui nit:

$$S_{nec.nit} \geq \frac{200}{4} = 50\ mm^2$$

4. Calculăm diametrul necesar unui nit:

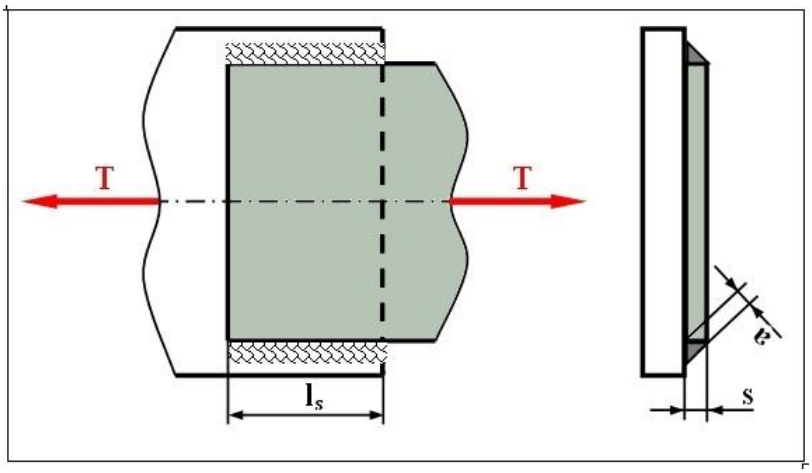
$$d_{nec.nit} \geq \sqrt{\frac{4\cdot 50}{\pi}}$$

$$d_{nec.nit} \geq 7,98\ mm$$

Rotunjim valoarea obţinută la dimensiunea standardizată cea mai apropiată:

$$\mathbf{d_{nit} = 8\ mm}$$

II. ***Să se verifice îmbinarea sudată din figură, având datele alăturate:***



T = 30.000 N

l_s = 60 mm

a = 3,5 mm

s = 5 mm

$\tau_{afs} = 80\ \frac{N}{mm^2}$

Rezolvare:

Problema se bazează pe condiţia de rezistenţă.

1. Calculăm secţiunea efectivă a sudurii; la sudurile de colţ ea se află în planul ce conţine înălţimea **a**:

$$\mathbf{Sef = 2\ (3{,}5 \cdot 60) = 420\ mm^2}$$

2. Calculăm efortul unitar transversal efectiv în sudură:

$$\tau_{ef} = \frac{30.000}{420}$$

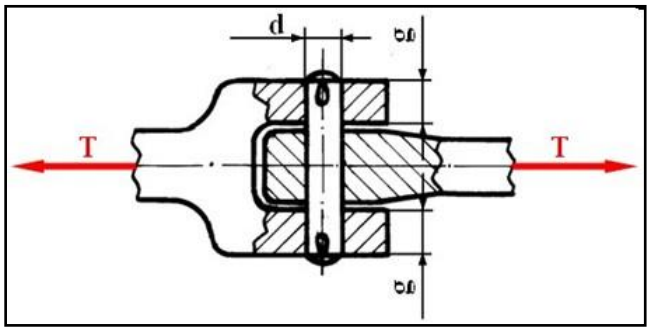
$$\tau_{ef} = 71{,}4\ \frac{N}{mm^2}$$

3. Comparăm cele două eforturi unitare:

$$71{,}4 < 80$$

Bara verifică.

III. ***Să se determine forţa tăietoare capabilă pentru asamblarea cu ştift din figură, având datele alăturate:***



d = 10 mm

g = 10 mm

materialul ştiftului – OL 70

Rezolvare:

Problema se bazează pe condiţia de rezistenţă.

1. Calculăm secţiunea efectivă în care are loc solicitarea:

$$S_{ef} = 2\frac{\pi \cdot 10^2}{4} = 157{,}08\ mm^2$$

Din Tabelul nr.1 apreciem pentru OL 70 – $\tau_{afs} = 180\ \frac{N}{mm^2}$

2. Calculăm forţa tăietoare capabilă:

$$T_{cap} \leq 157{,}8 \cdot 180$$

$$T_{cap} \leq 28.270N$$

VIII. MOMENTE DE INERŢIE, MODULE DE REZISTENŢĂ

VIII. 1. Mărimi utilizate

Simbolul	Denumirea	Unitatea de măsură
i_y	raza de inerţie faţă de axa y	**mm**
i_z	raza de inerţie faţă de axa z	**mm**
l	distanţa dintre două axe paralele	**mm**
r	distanţa de la centrul de coordonate (polul) O la centrul	**mm**
r_{max}	distanţa de la centrul de coordonate (polul) O la centrul elementului de suprafaţă cel mai depărtat (fibra extremă)	**mm**
y_g	distanţa de la centrul de greutate G la axa y	**mm**
y_{max}	distanţa de la marginea secţiunii la axa y	**mm**
z_g	distanţa de la centrul de greutate G la axa z	**mm**
z_{max}	distanţa de la marginea secţiunii la axa z	**mm**
S	suprafaţa plană (secţiunea)	mm^2
ΔS	element de suprafaţă	mm^2
S_y	momentul static faţă de axa y	mm^3
S_z	momentul static faţă de axa z	mm^3
W_p	modulul de rezistenţă polar	mm^3
W_y	modulul de rezistenţă axial faţă de axa y	mm^3
W_z	modulul de rezistenţă axial faţă de axa z	mm^3
I_p	modulul de inerţie polar	mm^4
I_y	modulul de inerţie axial faţă de axa y	mm^4
I_z	modulul de inerţie axial faţă de axa z	mm^4
I_{yz}	modulul de inerţie axial faţă de axele y şi z	mm^4

VIII. 2. Generalităţi

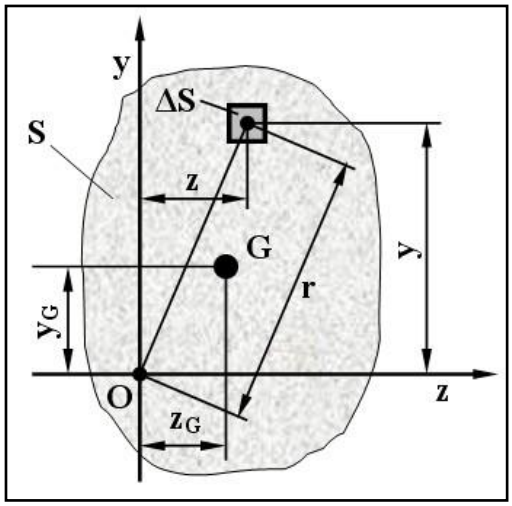
Întinderea–compresiunea şi forfecarea sunt solicitări la care eforturile tind să dea **translaţii** secţiunilor. Solicitările de încovoiere şi răsucire, care urmează, sunt produse de eforturi care tind să dea **rotaţii** secţiunilor.

În situaţia când o secţiune are tendinţa de rotaţie intervin caracteristici geometrice specifice, care trebuie studiate în prealabil; ele vor apare în cursul definirii solicitărilor de încovoiere şi răsucire dar le vom folosi şi în alte situaţii (flambajul).

VIII. 3. Momente statice

Considerăm o suprafaţă plană **S** împărţită în elemente mici de suprafaţă (**ΔS**), având coordonatele cunoscute.

Considerăm cunoscute şi coordonatele centrului de greutate **G** al suprafeţei.



Prin definiţie, momentul static al elementului de suprafaţă **ΔS** în raport cu axa **z** este produsul **y·ΔS.**

Momentul static al unei suprafeţe în raport cu o axă este egal cu produsul dintre aria suprafeţei şi distanţa de la centrul de greutate al acesteia la axa respectivă.

$$S_z = \sum_S y \cdot \Delta S = y_G \cdot S$$

$$S_y = \sum_S z \cdot \Delta S = z_G \cdot S$$

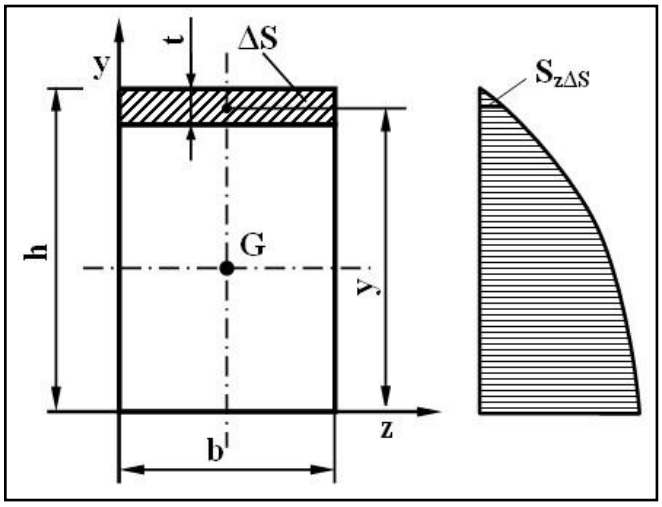
Observaţii

Dacă axa trece prin centrul de greutate al suprafeţei momentul static este nul.

Dacă suprafaţa plană este o figură compusă, ea se descompune în figuri geometrice simple. Momentul static total este suma momentelor statice parţiale.

VIII. 3. 1. Aplicaţii

Momentul static al unui dreptunghi



Considerăm dreptunghiul **b**x**h**

Pentru fâşia **ΔS**:

$$S_{z\Delta S} = b \cdot t \cdot y$$

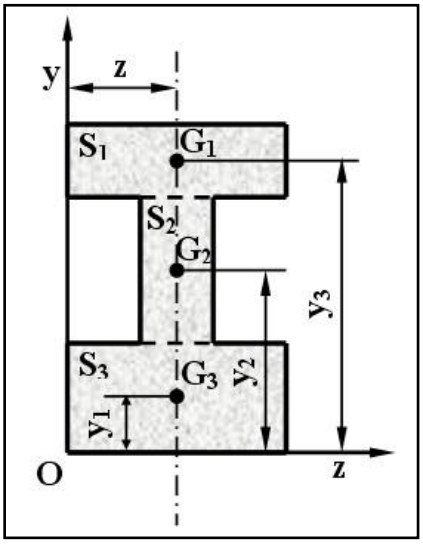
Pentru dreptunghi:

$$S_z = \frac{b \cdot h^2}{2}$$

$$S_y = \frac{h \cdot b^2}{2}$$

Valorile parţiale se pot pune într–o diagramă care dă variaţia momentului static.

Momentul static al unei figuri compuse



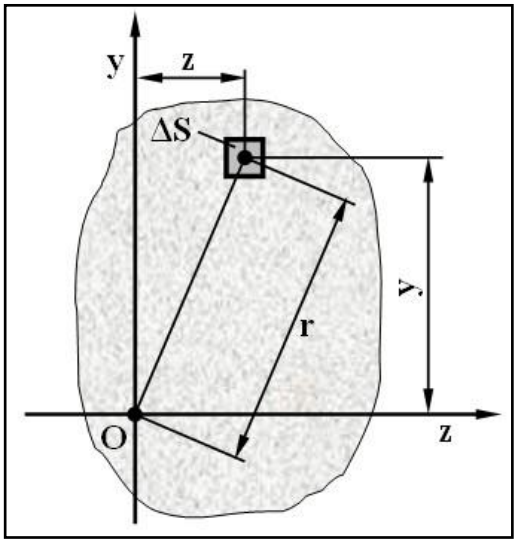
$$S_z = S_1 \cdot y_1 + S_2 \cdot y_2 + S_3 \cdot y_3$$
$$S_y = z(S_1 + S_2 + S_3)$$

VIII. 4. Momente de inerţie

Momentele de inerţie pot fi:

- **axiale** (faţă de o axă)
- **centrifuge** (faţă de două axe)
- **polare** (faţă de un punct)

VIII. 4. 1. Momente de inerţie axiale



Prin definiţie momentul de inerţie axial al elementului de suprafaţă **ΔS** faţă de axa **z** este produsul $y^2 \cdot \Delta S$.

Momentul de inerţie axial al unei suprafeţe este dat de suma produselor $y^2 \cdot \Delta S$ *pentru întreaga suprafaţă, raportată la axa respectivă (**z**).*

$$I_z = \sum_S y^2 \cdot \Delta S$$
$$I_y = \sum_S z^2 \cdot \Delta S$$

Observaţie

Momentele de inerţie axiale sunt întotdeauna pozitive. Dacă sistemul de axe **yOz** trece prin centrul de greutate al suprafeţei, momentele de inerţie calculate în raport cu aceste axe se numesc **momente de inerţie principale (centrale).**

VIII. 4. 2. Momente de inerţie centrifuge

Prin definiţie, momentul de inerţie centrifug al elementului de suprafaţă **ΔS** din figura precedentă, faţă de axele y şi z, este dat de produsul **y·z·ΔS**.

*Momentul de inerţie centrifug al suprafeţei **S** faţă de axele **y** şi **z** este dat de suma produselor **y·z·ΔS** ale suprafeţei.*

$$\mathbf{I_{yz} = \sum_S y \cdot z \cdot \Delta S}$$

Observaţie

Momentele de inerţie pot fi pozitive, negative sau nule.

VIII. 4. 3. Momente de inerţie polare

Ne referim la figura precedentă şi considerăm drept pol punctul de intersecţie al celor două axe.

Prin definiţie, momentul de inerţie polar al elementului de suprafaţă **ΔS** este dat de produsul $\mathbf{r^2 \cdot \Delta S}$.

*Momentul de inerţie polar al suprafeţei **S** faţă de polul **O** este dat de suma produselor $\boldsymbol{r^2 \cdot \Delta S}$ ale suprafeţei.*

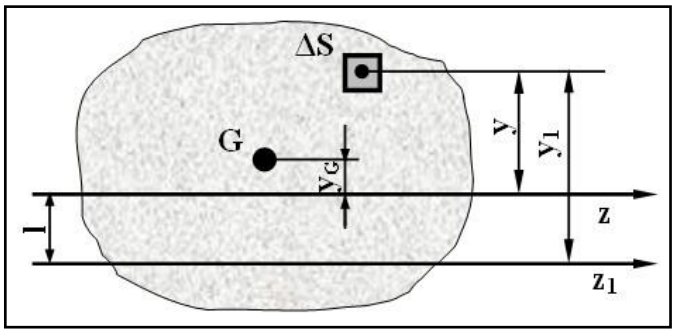
$$\mathbf{I_p = \sum_S r^2 \cdot \Delta S}$$

Observaţii

Momentul de inerţie polar este întotdeauna pozitiv.

Momentul de inerţie polar este egal cu suma momentelor de inerţie axiale faţă de două axe perpendiculare ce trec prin pol.

VIII. 4. 4. Variaţia momentelor de inerţie axiale în raport cu două axe paralele



Considerăm suprafaţa din figură şidouă axe paralele – **z** şi $\mathbf{z_1}$. Putem scrie momentele de inerţie axiale faţă de cele două axe:

$$\mathbf{I_z = \sum_S y^2 \cdot \Delta S}$$

$$\mathbf{I_{z_1} = \sum_S y_1^2 \cdot \Delta S}$$

Avem: $\mathbf{y_1 = y + l}$

Putem scrie:

$$\mathbf{I_{z_1} = \sum_S (y + l)^2 \cdot \Delta S}$$

$$\mathbf{I_{z_1} = \sum_S y^2 \cdot \Delta S + \sum_S 2y \cdot l \cdot \Delta S + \sum_S l^2 \cdot \Delta S}$$

$$\boxed{I_{z_1} = I_z + 2l \cdot S_z + l^2 \cdot S}$$ **ecuaţia lui Steiner**

Dacă axa z trece prin centrul de greutate al suprafeţei, cota $y_G = 0$

$$\boxed{I_{z_1} = I_z + l^2 \cdot S}$$ **Steiner**

Observaţie

Cel mai mic moment de inerţie axial al unei suprafeţe se obţine faţă de o axă ce trece prin centrul de greutate al suprafeţei.

VIII. 5. Raze de inerţie

Raza de inerţie este o caracteristică geometrică a suprafeţei. Se determină cu relaţiile:

$$\begin{cases} S \cdot i_y^2 = I_y \\ S \cdot i_z^2 = I_z \end{cases} \rightarrow \begin{cases} i_y = \sqrt{\dfrac{Iy}{S}} \\ i_z = \sqrt{\dfrac{I_z}{S}} \end{cases}$$

Raza de inerţie *este distanţa* ***fictivă*** *la care se găseşte suprafaţa, astfel ca produsul dintre pătratul razei de inerţie şi suprafaţă să fie egal cu momentul de inerţie.*

VIII. 6. Module de rezistenţă

Modulul de rezistenţă *al unei suprafeţe în raport cu o axă este raportul dintre momentul de inerţie şi distanţa de la marginea secţiunii la axă.*

Modulele de rezistenţă **axiale** au relaţiile:

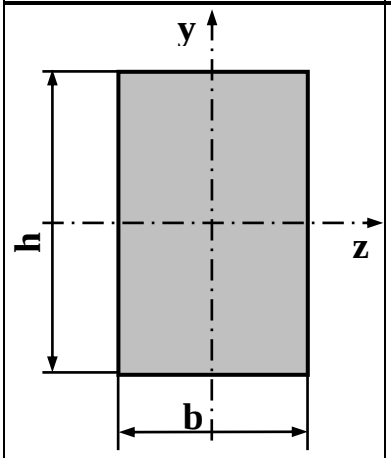
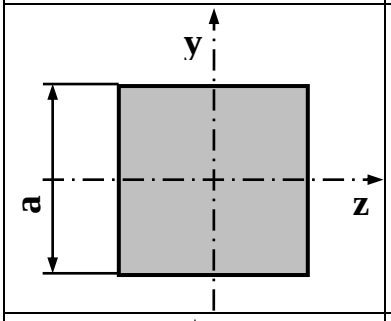
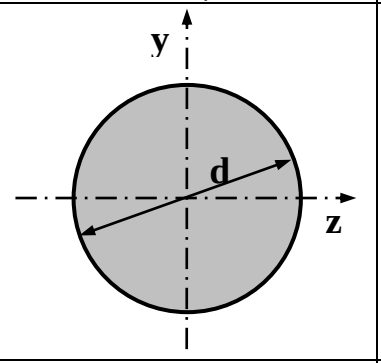
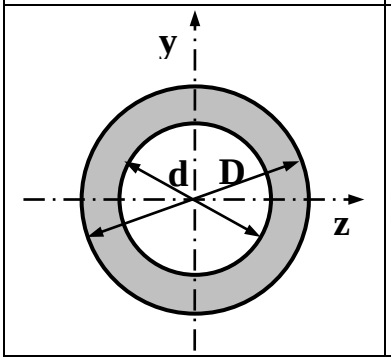
$$\boxed{\begin{aligned} W_z &= \frac{I_z}{y_{max}} \\ W_y &= \frac{I_y}{z_{max}} \end{aligned}}$$

În mod asemănător putem scrie o relaţie pentru modulul de rezistenţă **polar**:

$$\boxed{W_p = \frac{I_p}{r_{max}}}$$

VIII. 7. Momente de inerţie şi module de rezistenţă pentru unele suprafeţe geometrice simple

Tabelul nr.2

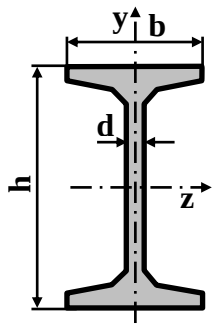
FIGURA GEOMETRICĂ	Momentul de inerţie faţă de		Distanţa de la marginea secţiunii la		Modulul de rezistenţă faţă de	
	Axa **z**	Axa **y**	Axa **z**	Axa **y**	Axa **z**	Axa **y**
0	1	2	3	4	5	6
	$I_Z = \frac{b \cdot h^3}{12}$	$I_Y = \frac{h \cdot b^3}{12}$	$z_{max} = \frac{b}{2}$	$y_{max} = \frac{h}{2}$	$W_Z = \frac{b \cdot h^2}{6}$	$W_Y = \frac{h \cdot b^2}{6}$
	$I_Z = I_Y = \frac{a^4}{12}$		$z_{max} = y_{max} = \frac{a}{2}$		$W_Z = W_Y = \frac{a^3}{6}$	
	$I_Z = I_Y = \frac{\pi \cdot d^4}{64}$		$z_{max} = y_{max} = \frac{d}{2}$		$W_Z = W_Y = \frac{\pi \cdot d^3}{6}$	
	$I_Z = I_Y = \frac{\pi\left(D^4 - d^4\right)}{64}$		$z_{max} = y_{max} = \frac{D}{2}$		$W_Z = W_Y = \frac{\pi\left(D^4 - d^4\right)}{32D}$	

Observaţie

Pentru solicitările de încovoiere şi răsucire se confecţionează semifabricate ale căror secţiuni au cele mai mari momente de inerţie şi module de rezistenţă la cele mai mici consumuri de material.

Pentru încovoiere avem profilele **I** şi **U**, la care se dau în tabele specifice valorile momentelor de inerţie şi modulelor de rezistenţă.

Tabelul nr.3



h – înălţimea
b – lăţimea
d – grosimea inimii
S – aria secţiunii
G – masa teoretică

Simbol	h	b	d	S	G	Mărimile statice faţă de axa z			Mărimile statice faţă de axa y		
						I_z	W_z	i_z	I_y	W_y	i_y
	mm	mm	mm	mm^2	kg/m	cm^4	cm^3	cm	cm^4	cm^3	cm
I 8	80	42	3,9	758	5,95	77,8	19,5	3,20	6,29	3,00	0,91
I 10	100	50	4,5	1.060	8,32	171	34,2	4,01	12,2	4,88	1,07
I 12	120	58	5,1	1.420	11,2	328	54,7	4,81	21,5	7,41	1,23
I 14	140	66	5,7	1.830	14,4	573	81,9	5,61	36,2	10,71	1,40
I 16	160	74	6,3	2.280	17,9	935	117	6,40	54,7	14,8	1,55
I 18	180	82	6,9	2.790	21,9	1.450	161	7,20	81,3	19,8	1,71
I 20	200	90	7,5	3.350	26,3	2.140	214	8,00	117	26,0	1,87
I 22	220	98	8,1	3.960	31,1	3.060	278	8,80	162	33,1	2,02
I 24	240	106	8,7	4.610	36,2	4.250	354	9,59	221	41,7	2,20
I 26	260	113	9,4	5.340	41,9	5.740	442	10,4	288	51,0	2,32
I 28	280	119	10,1	6.110	48,0	7.590	542	11,1	364	61,2	2,45
I 30	300	125	10,8	6.910	54,2	9.800	653	11,9	451	72,2	2,56

IX. ÎNCOVOIEREA

IX. 1. Mărimi utilizate

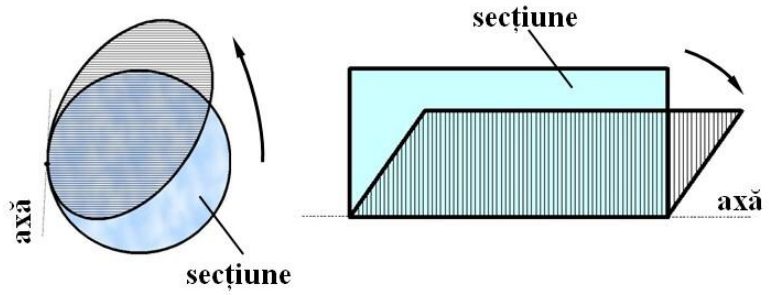
Simbolul	Denumirea	Unitatea de măsură
a	distanţa de la forţa **N** la reazemul **A**	**mm**
b	distanţa de la forţa **N** la reazemul **B**	**mm**
d	distanţa de la punctul **P** la direcţia forţei	**mm**
l	lungimea barei	**mm**
Δl	alungirea	**mm**
r_g	raza de giraţie (raza de curbare a axei barei)	**mm**
y	distanţa de la axa barei la o fibră oarecare	**mm**
y_{max}	distanţa de la axa barei la fibra cea mai depărtată	**mm**
α	unghiul la centru între două secţiuni apropiate ale barei	**grad**
S_{ef}	secţiunea efectivă	mm^2
S_{nec}	secţiunea necesară	mm^2
W_z	modulul de rezistenţă axial al secţiunii	mm^3
$W_{z.ef}$	modulul de rezistenţă axial efectiv	mm^3
$W_{z.nec}$	modulul de rezistenţă axial necesar	mm^3
I_z	momentul de inerţie al secţiunii	mm^4
I_{zf}	momentul de inerţie al secţiunii fibrei faţă de axa neutră	mm^4
F	forţa	**N**
N	forţa normală (axială)	**N**
T	forţa tăietoare (transversală)	**N**
R_A	reacţiunea în reazemul A	**N**
R_B	reacţiunea în reazemul B	**N**
M	momentul încovoietor	$N \cdot mm$
M_{max}	momentul încovoietor maxim	$N \cdot mm$
M_f	momentul încovoietor pe fibră	$N \cdot mm$
M_{sf}	momentul static al secţiunii fibrei faţă de axa neutră	mm^3
ε	alungirea specifică	–
σ	efortul unitar la întindere	$\frac{N}{mm^2}$
σ_{ai}	efortul unitar admisibil la încovoiere (rezistenţa admisibilă)	$\frac{N}{mm^2}$
σ_c	efortul unitar la compresiune	$\frac{N}{mm^2}$

σ_{ef}	efortul unitar efectiv	$\frac{N}{mm^2}$
σ_{max}	efortul unitar maxim	$\frac{N}{mm^2}$
σ_t	efortul unitar la tracţiune (întindere)	$\frac{N}{mm^2}$
E	modulul de elasticitate longitudinală	$\frac{N}{mm^2}$

IX. 2. Generalităţi

O bară dreaptă se consideră solicitată la încovoiere când eforturile într–o secţiune oarecare tind să dea acesteia o rotaţie, în jurul unei axe conţinute în planul secţiunii.

Ilustrare

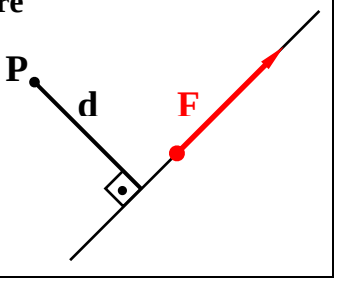


Momentul încovoietor – componentă a efortului, care tinde să dea unei secţiuni o rotaţie în jurul unei axe conţinute de planul secţiunii.

Momentul unei forţe faţă de un punct este dat de produsul dintre forţă şi distanţa cea mai scurtă de la punct la *direcţia forţei*.

$$\overline{M} = \overline{F} \cdot d$$

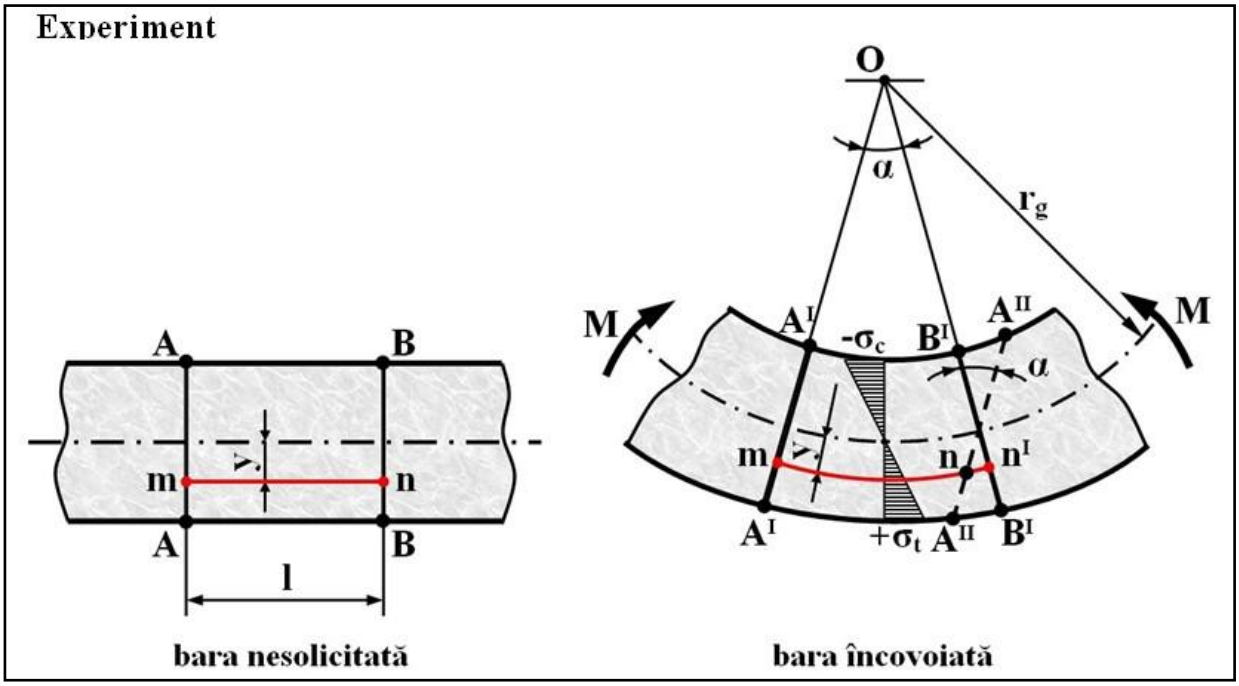
Ilustrare



Momentul este o mărime vectorială ca şi forţa dar pentru cazurile noastre, cu o singură direcţie a forţelor, îl vom nota în continuare fără semnul specific.

Ca şi la celelalte solicitări, se poate pune în evidenţă o legătură între efort şi deformaţie.

Pentru ilustrare, reprezentăm la scară mărită o bară solicitată la încovoiere.



Observaţii

Considerăm bara formată din fibre paralele cu axa şi două plane transversale, **A–A** şi **B–B**, care limitează sectorul studiat.

Sub acţiunea momentului încovoietor fibrele superioare se comprimă iar cele inferioare se lungesc.

Fibra medie (axa barei) rămâne neutră deoarece trecerea de la întindere la compresiune se face prin punctul zero.

Considerăm că fibra neutră se curbează după un arc de cerc, a cărui rază este $\mathbf{r_g}$.

Conform ipotezei lui Bernoulli, cele două secţiuni marcate (**A–A** şi **B–B**) rămân plane şi în timpul încovoierii.

Luăm un segment oarecare de fibră **mn**, pentru care vom deduce legea lui Hooke, ca şi la întindere.

Reprezentăm planul $\mathbf{A^{II}–A^{II}}$, paralel cu planul $\mathbf{A^{I}–A^{I}}$, pentru a ilustra alungirea fibrei **mn** faţă de poziţia nesolicitată.

Alungirea specifică a fibrei este:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{nn^I}{mn} = \frac{y \cdot \alpha}{r_g \cdot \alpha} = \frac{y}{r_g}$$

Considerăm îndeplinită condiţia de elasticitate:

$$\frac{\sigma}{\varepsilon} = E \quad \rightarrow \quad \sigma = \frac{y}{r_g} E$$

Deoarece asupra fibrei lucrează numai încovoierea, nu avem forţe axiale:

$$\begin{cases} \mathbf{N = 0} \\ \mathbf{N = \sigma \cdot S_f = \frac{y}{r_g} \cdot E \cdot S_f = \frac{E}{r_g} \cdot y \cdot S_f} \end{cases}$$

Pentru că $\mathbf{\frac{E}{r_g} \neq 0}$ rezultă că $\mathbf{y \cdot S_f = 0}$

Produsul reprezintă momentul static al secţiunii fibrei faţă de axa neutră:

$$\mathbf{y \cdot S_f = M_{sf}}$$

Pentru bară vom scrie:

$$\mathbf{N = \frac{E}{r_g} \sum y \cdot \Delta S = 0 \quad \rightarrow \quad \sum y \cdot \Delta S = 0}$$

adică momentul static al secţiunii barei faţă de axa neutră este nul, ceea ce confirmă faptul că axa neutră trece prin centrul de greutate al secţiunii.

Determinăm mărimea momentului încovoietor pe fibră:

$$\mathbf{M_f = \underbrace{\sigma \cdot S_f}_{\text{forţo}} \cdot y = \frac{y}{r_g} \cdot E \cdot S_f \cdot y = \frac{E}{r_g} \cdot y^2 \cdot S_f}$$

Produsul $\mathbf{y^2 \cdot S_f}$ reprezintă momentul de inerţie al secţiunii fibrei faţă de axa neutră:

$$\mathbf{y^2 \cdot S_f = I_{zf}}$$

Avem sistemul de ecuaţii:

$$\begin{cases} \mathbf{M_f = \frac{E}{r_g} \cdot I_{zf}} \\ \mathbf{E = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{\sigma \cdot r_g}{y}} \end{cases}$$

din care rezultă:

$$\mathbf{M_f = \frac{\sigma \cdot I_{zf}}{y}} \qquad \textbf{ecuaţia lui Navier}$$

Pentru bară vom scrie:

$$\begin{cases} \mathbf{M = \sum M_f = \sum \frac{E}{r_g} \cdot y^2 \cdot \Delta S = \frac{E}{r_g} \cdot I_z} \\ \mathbf{E = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{\sigma \cdot r_g}{y}} \end{cases}$$

din care rezultă:

$$\mathbf{M = \frac{\sigma \cdot I_z}{y}} \quad \text{sau} \quad \mathbf{\sigma = \frac{M}{I_z} \cdot y} \qquad \textbf{ecuaţia lui Navier}$$

Formula Navier ne dă efortul unitar într–o fibră oarecare, însă efortul maxim se produce la extremităţi faţă de fibra neutră:

$$\mathbf{\sigma_{max} = \frac{M}{I_z} \cdot y_{max}}$$

Notăm raportul $\mathbf{\frac{I_z}{y_{max}} = W_z}$ şi rezultă:

$$\sigma_{max} = \frac{M}{W_z}$$

Am obţinut formula de bază pentru calculul la încovoiere.

Observaţii

Ca şi la întindere–compresiune, efortul unitar este dat de raportul dintre solicitare şi elementele secţiunii.

Formula Navier se aplică la bare ale căror secţiuni au o axă de simetrie, cu sarcini conţinute în planul de simetrie.

Axa neutră de la care se măsoară trece prin centrul de greutate al secţiunii şi este perpendiculară pe axa de simetrie a acesteia.

IX. 3. Reazeme

Barele solicitate la încovoiere au legături cu alte elemente, datorită cărora au o anumită poziţie.

Reazem – legătură care constrânge o piesă să rămână în contact cu altă piesă.

Clasificarea reazemelor se face în funcţie de numărul **constrângerilor** la care este supusă mişcarea unei piese în legătură cu altă piesă.

Reazemul simplu – constrânge bara să rămână în contact cu un punct pe suprafaţa altui element.

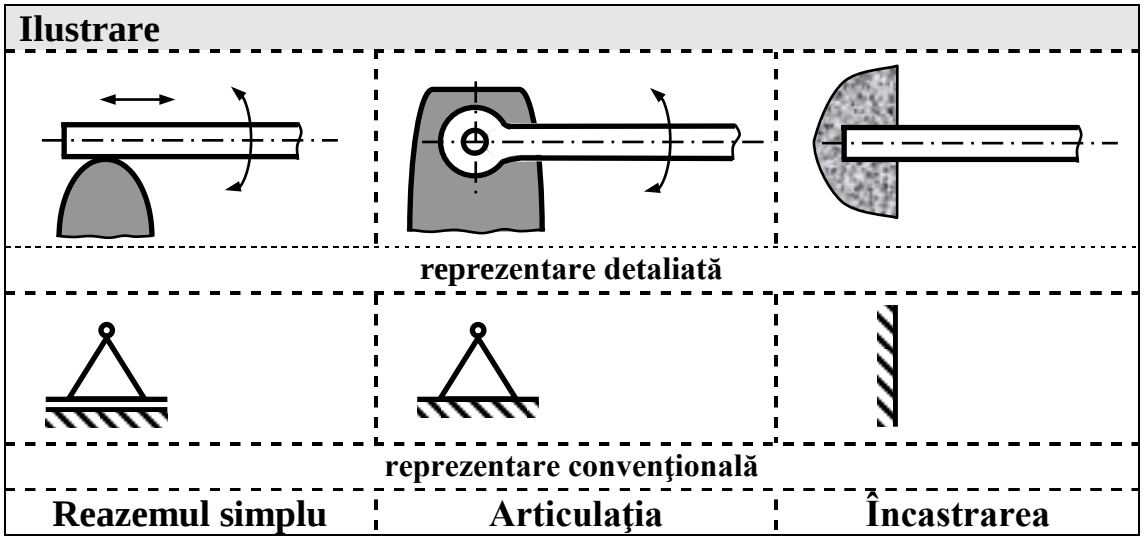
Permite rotaţia şi translaţia.

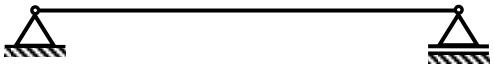
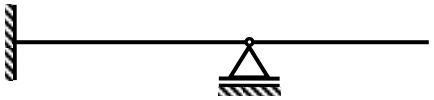
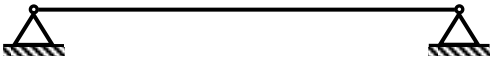
Articulaţia – constrânge bara să rămână cu o axă în contact permanent cu altă axă, fixă în spaţiu.

Permite rotaţia.

Încastrarea – constrânge bara să rămână cu o extremitate fixată în alt element.

Nu permite nici o mişcare.



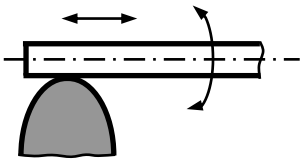
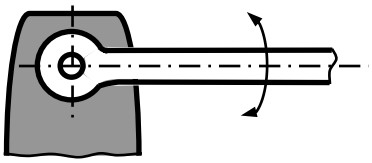
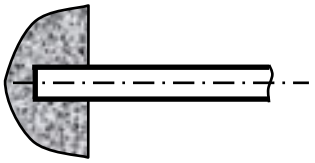
Exemple de bare rezemate		
I		**bară cu reazem simplu la un capăt şi articulaţie la celălalt**
II		**bară în consolă, încastrată la un capăt**
III		**bară articulată la ambele capete**

În mod obişnuit vom folosi prima bară ca model, fiind cea mai convenabilă; reazemul simplu la un capăt şi articulaţia la celălalt capăt permit încovoierea fără a mai introduce şi alte solicitări. Pentru simplificare, o vom numi **bara standard**.

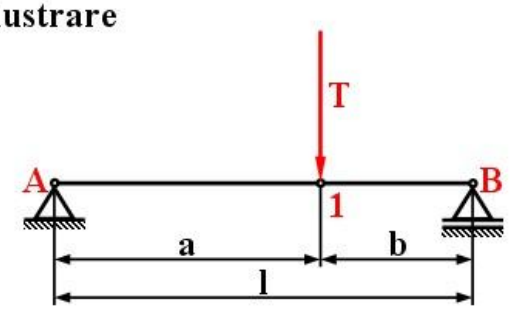
Deoarece studiem numai bare drepte, cu forţe perpendiculare pe ele (tăietoare) ce acţionează în centrele de greutate ale secţiunilor, putem reprezenta barele sub formă de linii continue care simbolizează axele barelor.

IX. 4. Reacţiuni

Ca urmare a solicitărilor exterioare pe bare, în reazemele lor apar reacţiuni (forţe şi momente), care depind de tipul reazemului (Vezi paragraful **II. 3.**):

		
Reazem mobil	Reazem fix	Încastrare
– Forţe tăietoare – –	– Forţe normale – Forţe tăietoare –	– Forţe normale – Forţe tăietoare – Momente

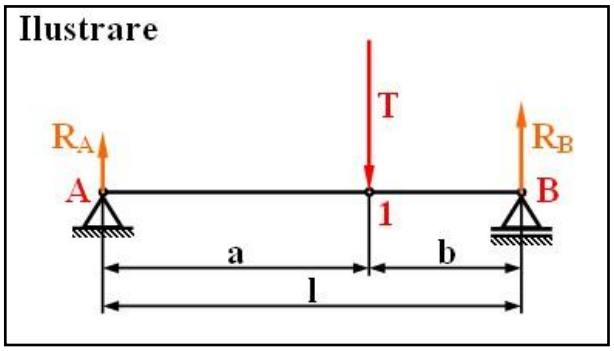
Ilustrare



Considerăm o bară standard, pe care acţionează forţa **T** în punctul **1**.

Cunoaştem mărimea forţei, de asemenea lungimile **a** şi **b**.

Ce mărime au reacţiunile în reazemele **A** şi **B**?



Reprezentăm reacţiunile R_A şi R_B ca fiind de sens opus forţei T.

Avem două necunoscute, deci trebuie să stabilim două ecuaţii.

Pentru a determina mărimea reacţiunilor vom utiliza o lege a fizicii, **legea echilibrului**.

IX. 4. 1. Legea echilibrului forţelor

Suma tuturor forţelor care acţionează bara este zero.

Pentru a scrie ecuaţia trebuie precizată *regula semnului*:

Se consideră pozitivă forţa îndreptată în sus.

Scriem toate forţele, de la stânga la dreapta şi obţinem ecuaţia echilibrului forţelor:

$$+ R_A - T + R_B = 0 \quad \text{sau}$$

$$R_A + R_B = T$$

IX. 4. 2. Legea echilibrului momentelor

Suma tuturor momentelor, faţă de acelaşi punct, este zero.

Pentru a scrie ecuaţia trebuie precizată *regula semnului*:

Se consideră pozitiv momentul care tinde să rotească în sens orar faţă de punct.

În principiu, putem alege orice punct pentru a scrie legea echilibrului momentelor. Cele mai convenabile sunt însă reazemele, pe care le considerăm fixe.

Faţă de reazemul **A**:

$$\sum (M)_A = 0$$

$$+ T \cdot a - R_B \cdot l = 0$$

$$R_B = T \frac{a}{l}$$

Faţă de reazemul **B**:

$$\sum (M)_B = 0$$

$$+ R_B \cdot l - T \cdot b = 0$$

$$R_A = T \frac{b}{l}$$

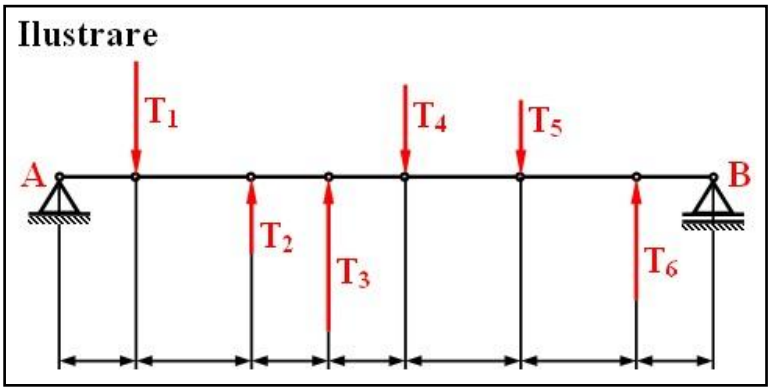
Observaţii

Am obţinut valorile celor două reacţiuni fără a mai utiliza ecuaţia echilibrului forţelor.

În practică reacţiunile se calculează cu ecuaţiile echilibrului momentelor şi se face verificarea cu ecuaţia echilibrului forţelor.

Am putut scrie ecuaţiile echilibrului cunoscând sensul reacţiunilor (opuse sensului forţei **T**).

Care este sensul reacţiunilor când pe bară acţionează mai multe forţe tăietoare?

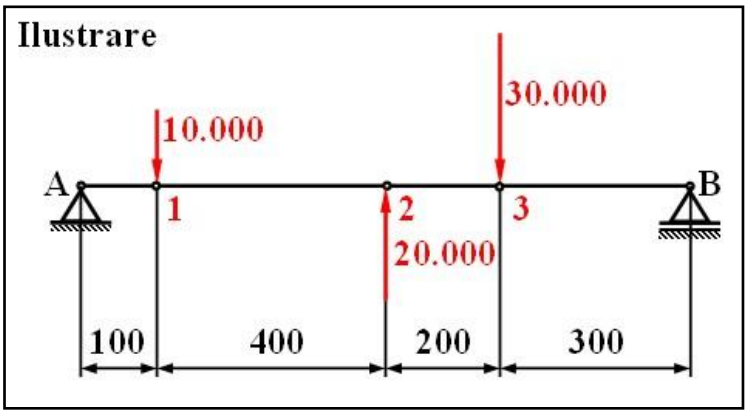


Se pot reprezenta sensurile reacţiunilor R_A şi R_B din figura alăturată?

Când pe bară acţionează mai multe forţe, ***nu*** cunoaştem sensurile reacţiunilor şi procedăm în felul următor:

1. Se reprezintă reacţiunile la întâmplare (în sus sau în jos).
2. Se calculează reacţiunile cu ecuaţiile echilibrului momentelor, faţă de reazeme.
   a. Dacă, în urma calculului, o reacţiune rezultă cu semnul + înseamnă că am reprezentat–o corect.
   b. Dacă, în urma calculului, o reacţiune rezultă cu semnul – înseamnă că am reprezentat–o greşit şi inversăm ***doar sensul*** ei pe desen (fără a reface calculele, deoarece valoarea este corectă).
3. Se face verificarea cu ecuaţia echilibrului forţelor.

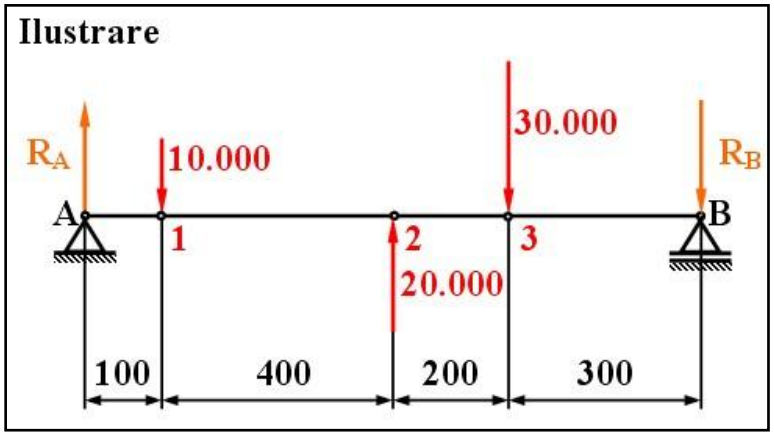
IX. 4. 3. Aplicaţie



Să se determine reacţiunile pentru bara din figura alăturată.

Ca şi în celelalte cazuri, măsurăm **T [N]** şi **l [mm]**

1. Se reprezintă reacţiunile la întâmplare



Luăm: R_A pozitiv

R_B negativ

2. Se calculează reacţiunile cu ecuaţiile echilibrului momentelor:

$$\sum(M)_A = 0$$

$$+10.000 \cdot 100 - 20.000 \cdot 500 + 30.000 \cdot 700 + R_B \cdot 1.000 = 0 \quad \Big| : 1.000$$

$$+1.000 - 10.000 + 21.000 + R_B = 0$$

$$R_B = -12.000\,N$$

$$\sum(M)_B = 0$$

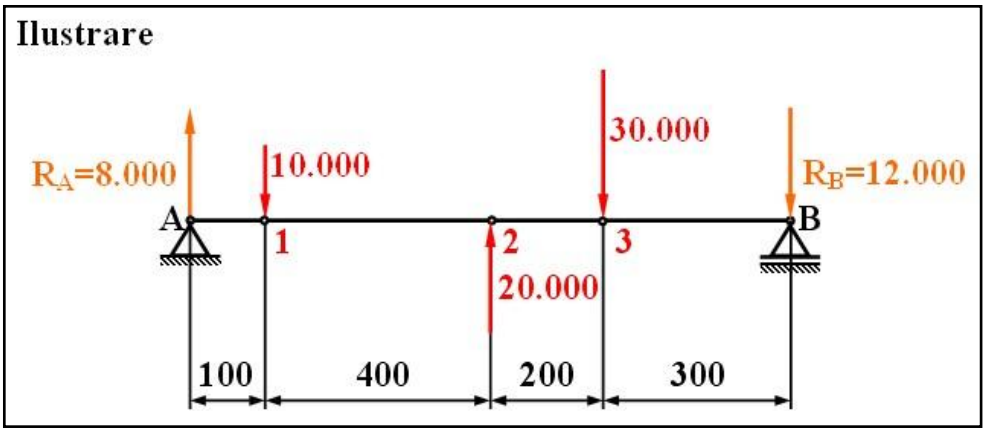
$$+R_A \cdot 1.000 - 10.000 \cdot 900 + 20.000 \cdot 500 - 30.000 \cdot 300 = 0 \quad \Big| : 1.000$$

$$+R_A - 9.000 + 10.000 - 9.000 = 0$$

$$R_A = +8.000\,N$$

R_A a rezultat pozitivă, înseamnă că am reprezentat–o corect.

R_B a rezultat negativă, înseamnă că am reprezentat–o invers; modificăm *sensul forţei pe desen*.



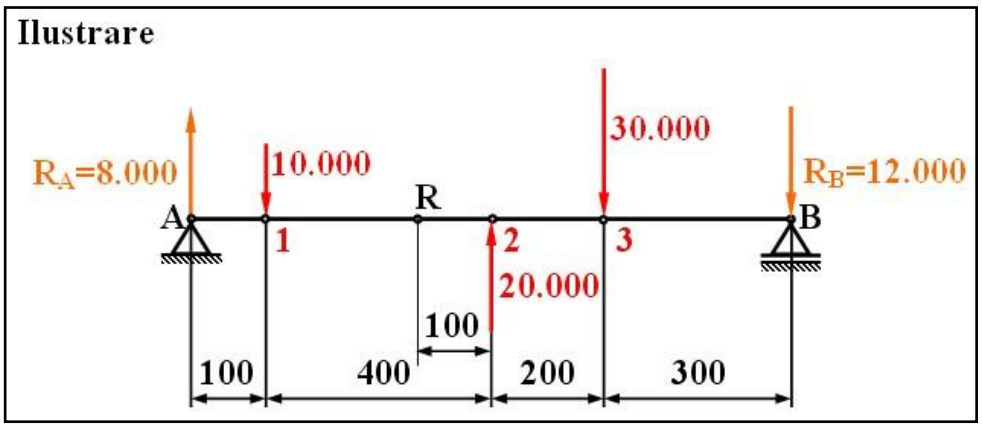
1. Se face verificarea cu ecuaţia echilibrului forţelor:

$$+8.000 - 10.000 + 20.000 - 30.000 + 12.000 = 0$$

$$0 = 0$$

IX. 5. Diagrama forţelor tăietoare

Dacă asupra unei bare drepte acţionează mai multe forţe tăietoare, este necesar să construim **diagrama forţelor tăietoare**, care să ne arate valoarea forţei tăietoare în fiecare secţiune.



*Pentru bara din figura alăturată, ce valoare are forţa tăietoare din punctul **R**?*

IX. 5. 1. Reguli de trasare

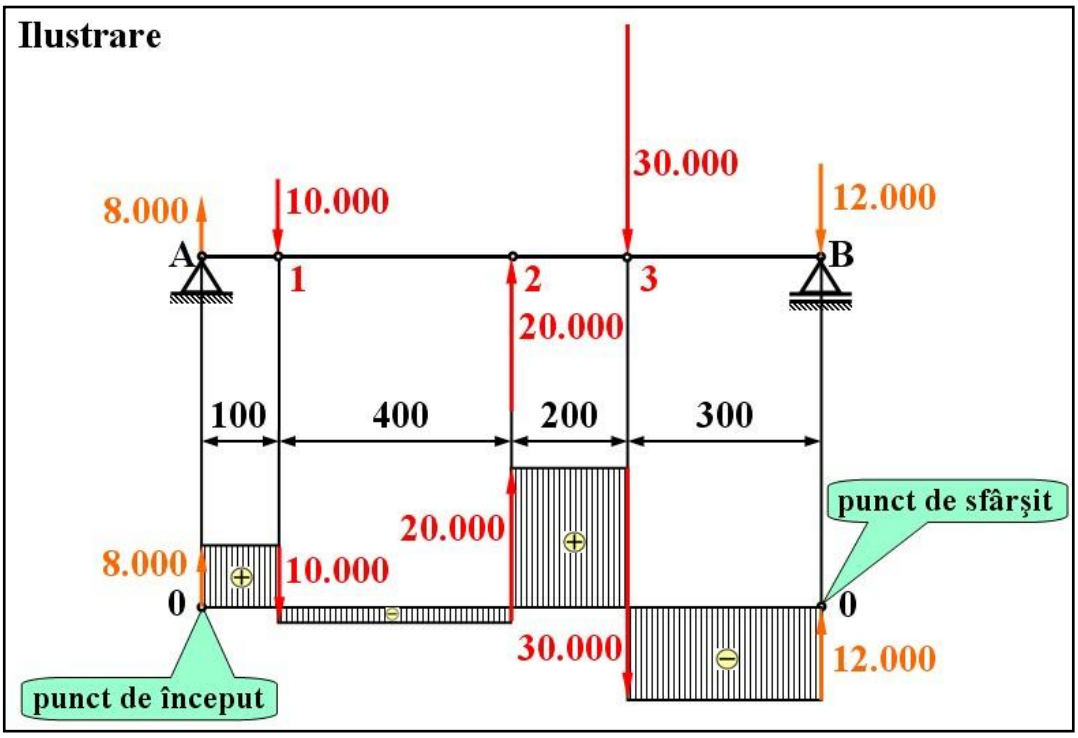
1. Diagrama se trasează la o scară a forţelor.
2. Diagrama este formată din linii orizontale, care fac un salt în dreptul forţelor tăietoare.
3. Deasupra liniei de referinţă diagrama se consideră pozitivă.

OBSERVAŢIE	Construcţia diagramei începe din stânga, de pe linia de referinţă.

IX. 5. 2. Aplicaţie

Să se traseze diagrama forţelor tăietoare pentru bara reprezentată mai sus.

1. Vom reprezenta forţele tăietoare la scara **10.000 N = 1 cm**.



Răspuns: În punctul **R** avem forţa $\mathbf{T_R = -2.000\ N}$.

Observaţii

Pornind de la construcţia diagramei din stânga, de pe linia de referinţă (linia **0**) trebuie să ajungem la capătul din dreapta tot pe linia de referinţă, pentru a respecta legea echilibrului forţelor.

Când avem forţe tăietoare concentrate, diagrama forţelor tăietoare este formată din valori constante pe intervale (linii orizontale).

IX. 6. Diagrama momentelor încovoietoare

Ca urmare a forţelor tăietoare, în lungul barei avem diferite valori ale momentului încovoietor. Este necesar să construim **diagrama momentelor încovoietoare**, care să ne arate valoarea momentului încovoietor în fiecare punct al barei.

IX. 6. 1. Reguli de trasare

1. Diagrama se trasează la o scară a momentelor.
2. Diagrama este formată din linii drepte, care se frâng în dreptul unei forţe.
3. Într–un punct oarecare al barei, momentul încovoietor este egal cu suma momentelor din stânga punctului *sau* cu suma momentelor din dreapta punctului cu semn schimbat.
4. Deasupra liniei de referinţă diagrama se consideră *negativă*.

Observaţii

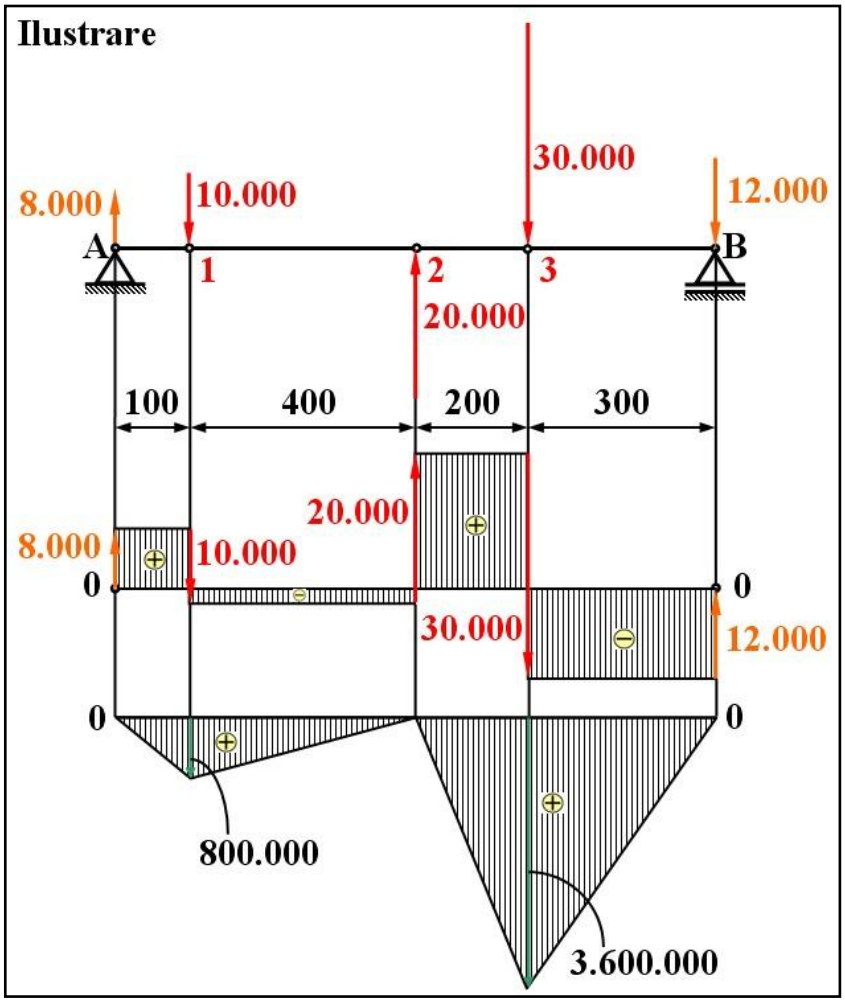
În calcule se respectă regula semnului pentru momente, pe care am stabilit–o la legea echilibrului momentelor.

Pe diagramă momentul se va reprezenta ca un vector perpendicular pe linia de referinţă.

IX. 6. 2. Aplicaţie

Considerăm bara din aplicaţia de la diagrama forţelor tăietoare.

Practic, pentru a trasa diagrama momentelor încovoietoare calculăm momentul încovoietor în fiecare punct în care acţionează o forţă.



$M_A = 0$

$M_1 = +8.000 \cdot 100 = 800.000$

$M_2 = +8.000 \cdot 500 - 10.000 \cdot 400$

$M_2 = 0$

$M_3 = -(-12.000 \cdot 300)$

$M_2 = +360.000$

$M_B = 0$

Ca şi în celelalte cazuri,

M [N·mm]

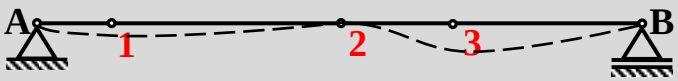
Am reprezentat diagrama momentelor încovoietoare sub diagrama forţelor tăietoare, alegând

scara:

100.000 N·mm = 1 mm

Observaţie

Se justifică acum de ce valorile pozitive se reprezintă sub linia de referinţă – ele ilustrează astfel şi deformaţia barei.



IX. 7. Calculul la încovoiere

Formula de bază pentru calculul la încovoiere este:

$$\sigma_{max} = \frac{M}{W_z}$$

Avem o relaţie între trei mărimi, fiecare dintre ele putând fi necunoscută.

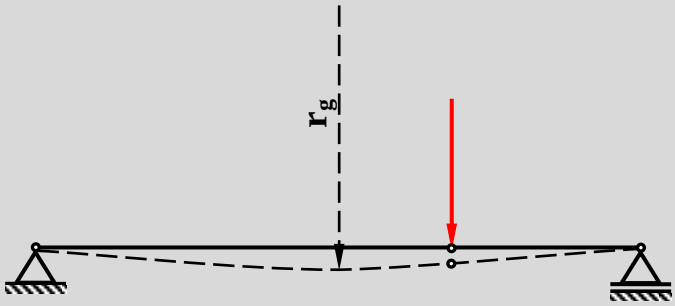
Ca şi la celelalte solicitări, apar trei variante de calcul:

- **Dimensionarea**, în care necunoscută este secţiunea barei
- **Verificarea**, în care necunoscut este efortul unitar al secţiunilor unei bare date
- **Determinarea momentului încovoietor capabil**, în care necunoscut este momentul încovoietor pe care îl poate suporta o bară dată

Observaţie

Această variantă de calcul se bazează pe condiţia de rezistenţă, adică pe cunoaşterea rezistenţei admisibile.

Pentru o bară solicitată la încovoiere pură deformaţia are loc după un arc de cerc de rază $\mathbf{r_g}$.



$$\frac{1}{r_g} = \frac{M}{E \cdot I_z} = \text{const.}$$

Produsul $E \cdot I_z$ se numeşte **rigiditate la încovoiere.**

IX. 8. Mersul calculelor

IX. 8. 1. Condiţia de rezistenţă

Dimensionarea

1. Se reprezintă toate elementele barei.
2. Se reprezintă recţiunile la întâmplare.

3. Se calculează reacţiunile cu ecuaţiile echilibrului momentelor, faţă de reazeme.

(Dacă din calcul o reacţiune rezultă cu semnul – se inversează sensul ei *pe desen*)

4. Se face verificarea cu ecuaţia echilibrului forţelor.
5. Se trasează diagrama forţelor tăietoare.
6. Se calculează momentul încovoietor în fiecare punct în care acţionează o forţă.
7. Se trasează diagrama momentelor încovoietoare.
8. Se scoate cel mai mare moment încovoietor din diagramă, indiferent de semn ($\mathbf{M_{max}}$).
9. Se aleg un material pentru care se determină, din tabelul de materiale (Tabelul nr.1), rezistenţa admisibilă – σ_{ai}.
10. Se calculează modulul de rezistenţă axial necesar barei:

$$W_{Znec} = \frac{M_{max}}{\sigma_{ai}}$$

11. Se alege o formă optimă de secţiune pentru care se cunoaşte formula modulului de rezistenţă axial (Tabelul nr.2).

(Sau se alege un profil, din tabelul de profile standardizate – Tabelul nr.3)

12. Se calculează dimensiunile secţiunii alese, rotunjindu–le prin mărire.

(Sau se stabileşte profilul standardizat care are valoarea modulului de rezistenţă axial acoperitoare)

Verificarea

1. Se reprezintă toate elementele barei.
2. Se stabileşte, din tabelul de materiale (Tabelul nr.1), rezistenţa admisibilă – σ_{ai}.
3. Se reprezintă recţiunile la întâmplare.
4. Se calculează reacţiunile cu ecuaţiile echilibrului momentelor, faţă de reazeme.

(Dacă din calcul o reacţiune rezultă cu semnul – se inversează sensul ei *pe desen*)

5. Se face verificarea cu ecuaţia echilibrului forţelor.
6. Se trasează diagrama forţelor tăietoare.
7. Se calculează momentul încovoietor în fiecare punct în care acţionează o forţă.
8. Se trasează diagrama momentelor încovoietoare.
9. Se scoate cel mai mare moment încovoietor din diagramă, indiferent de semn ($\mathbf{M_{max}}$).

(Dacă bara are mai multe mărimi de secţiuni, pot să existe mai multe secţiuni periculoase şi facem verificarea pentru toate)

10. Se determină modulul de rezistenţă axial al secţiunii în care acţionează momentul încovoietor maxim – W_z.

(Sau modulele de rezistenţă axiale ale secţiunilor considerate periculoase)

11. Se calculează efortul unitar efectiv în secţiune:

$$\sigma_{ef} = \frac{M_{max}}{W_z}$$

12. Se compară cele două eforturi unitare:

Dacă: – $\sigma_{ef} \leq \sigma_{ai}$ bara verifică

– $\sigma_{ef} > \sigma_{ai}$ bara nu verifică

Determinarea momentului capabil

1. Se reprezintă toate elementele barei.
2. Se stabileşte, din tabelul de materiale, rezistenţa admisibilă – σ_{ai}.
3. Se determină modulul de rezistenţă axial al secţiunii în care dorim să aflăm momentul încovoietor – W_{Zef} – valoare efectivă.
4. Se calculează momentul încovoietor capabil:

$$M_{cap} \leq \sigma_{ai} \cdot W_{Zef}$$

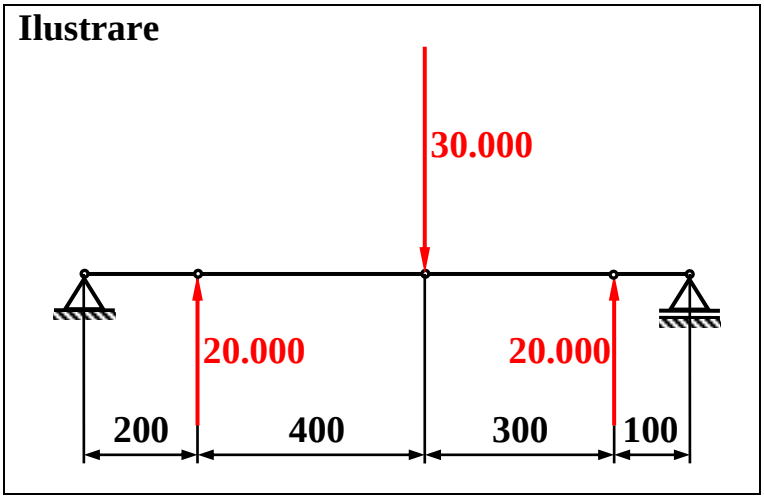
IX. 9. Sinteza solicitării

Legea lui Hooke (domeniul elastic)	$\sigma = \frac{M}{W_z}$	$\frac{1}{r_g} = \frac{M}{E \cdot I_z}$
Felul calculului	**Condiţia de rezistenţă**	
Dimensionarea	$W_z \geq \frac{M_{max}}{\sigma_{ai}} \rightarrow S_{nec}$	
Verificarea	$\sigma_{ef} = \frac{M_{max}}{W_z} \leq \sigma_{ai}$	
Determinarea momentului capabil	$M_{cap} \leq \sigma_{ai} \cdot W_{Zef}$	

IX. 10. Aplicaţii

I. ***Să se dimensioneze la încovoiere bara din figură:***

Ilustrare

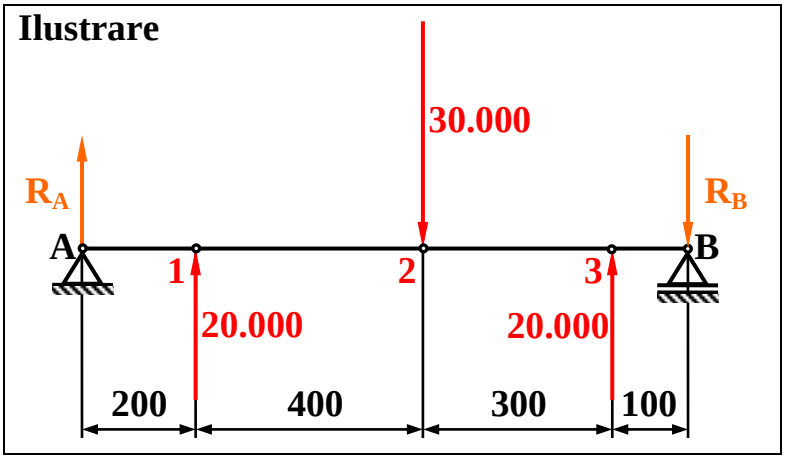


Rezolvare:

Problema se bazează pe condiţia de rezistenţă.

1. Reprezentăm toate elementele barei – notăm reazemele şi punctele de aplicaţie ale forţelor.
2. Reprezentăm recţiunile la întâmplare – R_A pozitivă şi R_B negativă.

Ilustrare



3. Calculăm reacţiunile cu ecuaţiile echilibrului momentelor, faţă de reaze me.

$$\sum (M)_A = 0$$

$$-20.000 \cdot 200 + 30.000 \cdot 600 - 20.000 \cdot 900 + R_B \cdot 1.000 = 0 \quad \Big| : 1.000$$

$$-4.000 + 18.000 - 18.000 + R_B = 0$$

$$R_B = +4.000\,N$$

Reacţiunea R_B a rezultat pozitivă, înseamnă că este reprezentată corect **în jos**.

$$\sum (M)_B = 0$$

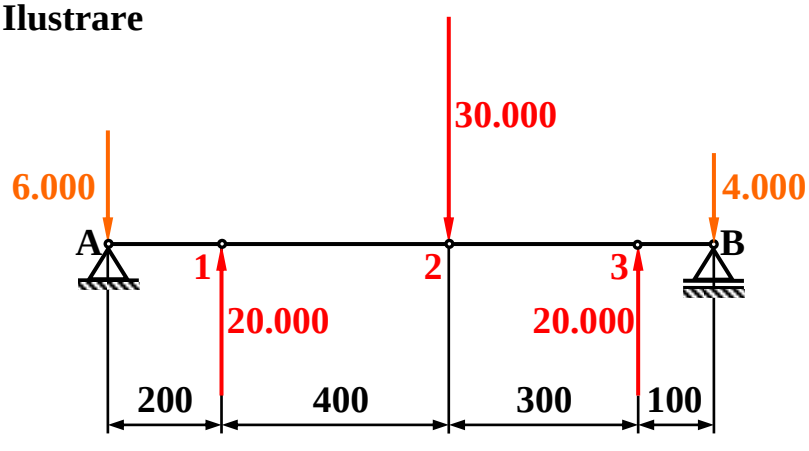
$$+R_A \cdot 1.000 + 20.000 \cdot 800 - 30.000 \cdot 400 + 20.000 \cdot 100 = 0 \quad \Big| : 1.000$$

$$+R_A + 16.000 - 12.000 + 2.000 = 0$$

$$R_B = -6.000\,N$$

Reacţiunea R_A a rezultat negativă, înseamnă că am reprezentat–o greşit în sus; corectăm **desenul**, reprezentând pe R_A **în jos**.

Ilustrare

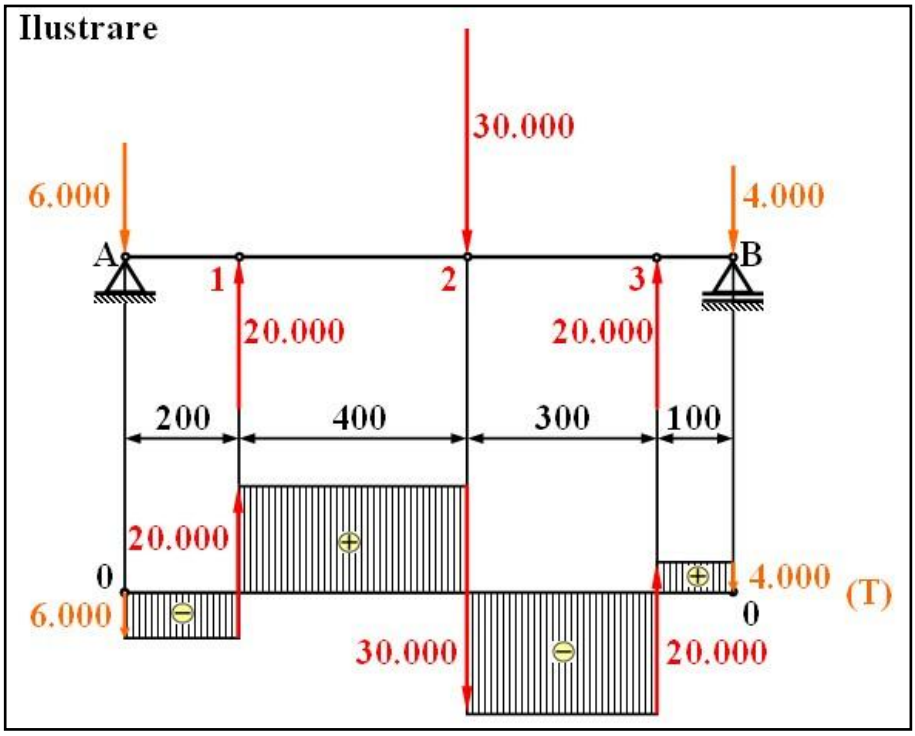


4. Facem verificarea cu ecuaţia echilibrului forţelor:

$$-6.000 + 20.000 - 30.000 + 20.000 - 4.000 = 0$$
$$+4.000 - 4.000 = 0$$

5. Trasăm diagrama forţelor tăietoare:

Stabilim scara forţelor: **1.000 N = 1 mm**



6. Se calculează momentul încovoietor în fiecare punct în care acţionează o forţă:

$M_A = 0$

$M_1 = -6.000 \cdot 200 = -1.200.000$ N·mm

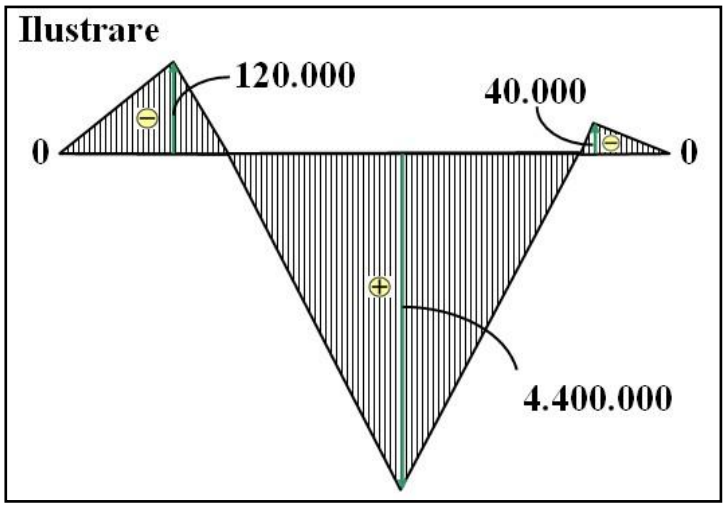
$M_2 = -6.000 \cdot 600 + 20.000 \cdot 400 = +4.400.000$ N·mm

$M_3 = -4.000 \cdot 100 = -400.000$ N·mm

$M_B = 0$

7. Trasăm diagrama momentelor încovoietoare:

Stabilim scara momentelor: **100.000 N·mm = 1 mm**



8. Scoatem cel mai mare moment încovoietor din diagrama momentelor încovoietoare, fără a ţine seama de semn:

$$\mathbf{M_{max} = 4.400.000\ N \cdot mm}$$

9. Alegem pentru bară, din Tabelul nr.1, oţelul OL 37, pentru care apreciem:

$$\sigma_{ai} = 140\ \frac{N}{mm^2}$$

10. Calculăm modulul de rezistenţă axial necesar barei:

$$W_{Znec} \geq \frac{4.400.000}{140}\ mm^3 \rightarrow W_{Znec} \geq 31.428\ mm^3$$

11. Alegem pentru bară secţiunea de formă circulară pentru care avem, din Tabelul nr.2, formula modulului de rezistenţă axial:

$$W_z = \frac{\pi \cdot d^3}{32}$$

12. Din punctele 10 şi 11 rezultă:

$$\frac{\pi \cdot d^3}{32} \geq 31.428$$

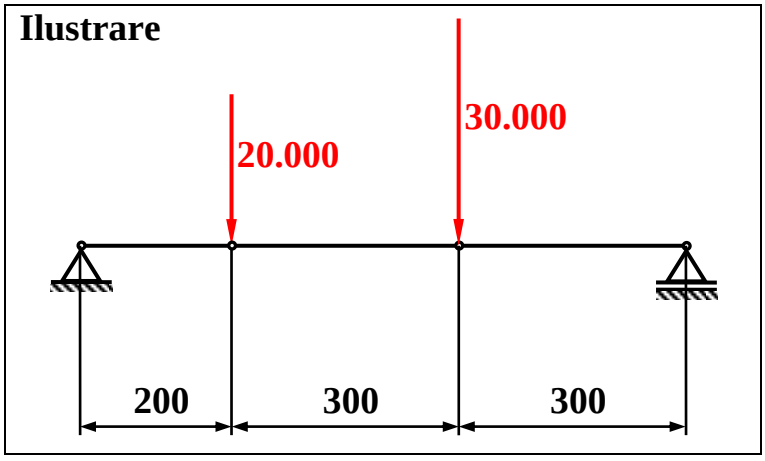
$$d_{nec} \geq \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 31.428}{\pi}}$$

$$d_{nec} \geq 68,4\ mm$$

Rotunjim la valoarea standardizată cea mai apropiată:

$$d_{nec} = 70\ mm$$

II. ***Să se verifice la încovoiere profilul I 14/OL 37, solicitat ca în figură:***



Rezolvare:

Problema se bazează pe condiţia de rezistenţă.

1. Reprezentăm toate elementele barei – notăm reazemele şi punctele de aplicaţie ale forţelor.
2. Reprezentăm ambele reacţiuni în sus (pozitive) deoarece toate forţele de acţiune sunt negative.
3. Calculăm reacţiunile cu ecuaţiile echilibrului momentelor, faţă de reazeme.

$$\sum(M)_A = 0$$

$$+20.000 \cdot 200 + 30.000 \cdot 500 - R_B \cdot 800 = 0 \quad | :100$$

$$+40.000 + 150.000 - 8R_B = 0$$

$$R_B = +23.750\,N$$

$$\sum(M)_B = 0$$

$$+R_A \cdot 800 - 20.000 \cdot 600 - 30.000 \cdot 300 = 0 \quad | :100$$

$$+8R_A - 120.000 - 90.000 = 0$$

$$R_B = +26.250\,N$$

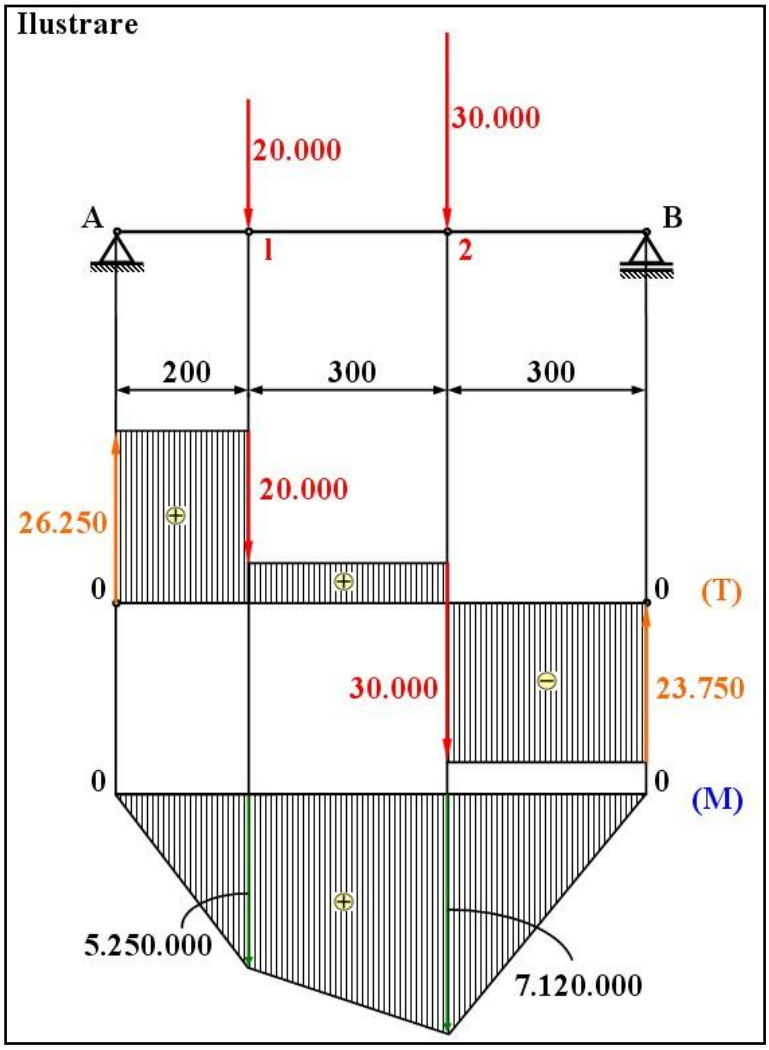
4. Facem verificarea cu ecuaţia echilibrului forţelor:

$$+26.250 - 20.000 - 30.000 + 23.750 = 0$$

$$+50.000 - 50.000 = 0$$

5. Trasăm diagrama forţelor tăietoare:

Stabilim scara forţelor: **1.000 N = 1 mm**



6. Se calculează momentul încovoietor în fiecare punct în care acţionează o forţă:

$$M_A = 0$$

$$M_1 = +26.250 \cdot 200$$

$$M_1 = +5.250.000\ N \cdot mm$$

$$M_2 = +23.750 \cdot 300$$

$$M_2 = +7.120.000\ N \cdot mm$$

$$M_B = 0$$

7. Trasăm diagrama momentelor încovoietoare:

Stabilim scara momentelor: **50.000**

N·mm = 1 mm

8. Scoatem cel mai mare moment încovoietor din diagrama momentelor încovoietoare, fără a ţine seama de semn:

$$\mathbf{M_{max} = 7.125.000\ N \cdot mm}$$

9. Stabilim, din Tabelul nr.1, oţelul OL 37, pentru care apreciem: $\sigma_{ai} = 140\ \frac{N}{mm^2}$

10. Scoatem pentru profilul **I 14**, din tabelul nr. 3, modulul de rezistenţă axial:

$$W_z = 81.000\ mm^3$$

11. Calculăm efortul unitar efectiv în secţiunea periculoasă:

$$\sigma_{ef} = \frac{7.125.000}{81.900} = 87\ \frac{N}{mm^2}$$

12. Comparăm cele două eforturi unitare:

$$87 < 140$$

Profilul **I 14** verifică.

X. RĂSUCIREA

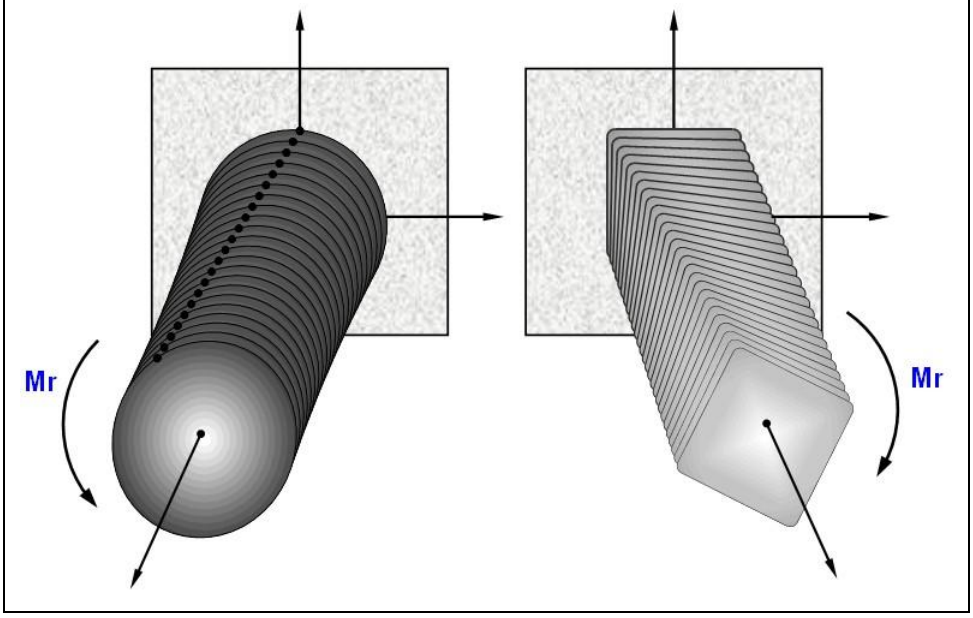
X. 1. Mărimi utilizate

Simbolul	Denumirea	Unitatea de măsură
d	diametrul	**mm**
D	diametrul exterior	**mm**
f	săgeata arcului	**mm**
f_s	săgeata unei spire de arc	**mm**
l	lungimea	**mm**
r	raza	**mm**
R	raza maximă	**mm**
γ	unghi de deformare (de alunecare specifică)	**radiani**
φ	unghi de rotire	**radiani**
θ	unghi de rotire specifică	**radiani**
θ_a	unghi de rotire specifică admisibil	**radiani**
ΔS	element de suprafaţă	mm^2
F	forţa	**N**
M_r	momentul de răsucire (torsiune)	**N·mm**
I_p	momentul de inerţie polar	mm^4
W_p	modulul de rezistenţă polar	mm^3
$W_{p.nec}$	modulul de rezistenţă polar necesar	mm^3
τ	efortul unitar transversal	$\frac{N}{mm^2}$
τ_{ef}	efortul unitar transversal efectiv	$\frac{N}{mm^2}$
τ_{ar}	efortul unitar transversal admisibil	$\frac{N}{mm^2}$
G	modulul de elasticitate transversală	$\frac{N}{mm^2}$
P	puterea	**kw**
n	turaţia	**rot/min**
z	numărul de spire	–

X. 2. Generalităţi

O bară dreaptă se consideră solicitată la răsucire când eforturile într–o secţiune oarecare tind să dea acesteia o rotaţie, faţă de secţiunile alăturate, în jurul unei axe perpendiculare în planul secţiunii.

Ilustrare

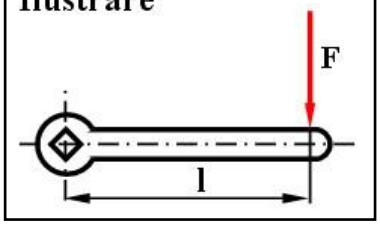


Moment de răsucire – componentă a efortului, care tinde să dea unei secţiuni o rotaţie în jurul unei axe perpendiculare pe planul secţiunii.

Momentul de răsucire, ca şi momentul încovoietor, este produsul dintre o forţă şi o distanţă:

$$M_r = F \cdot l$$

Ilustrare



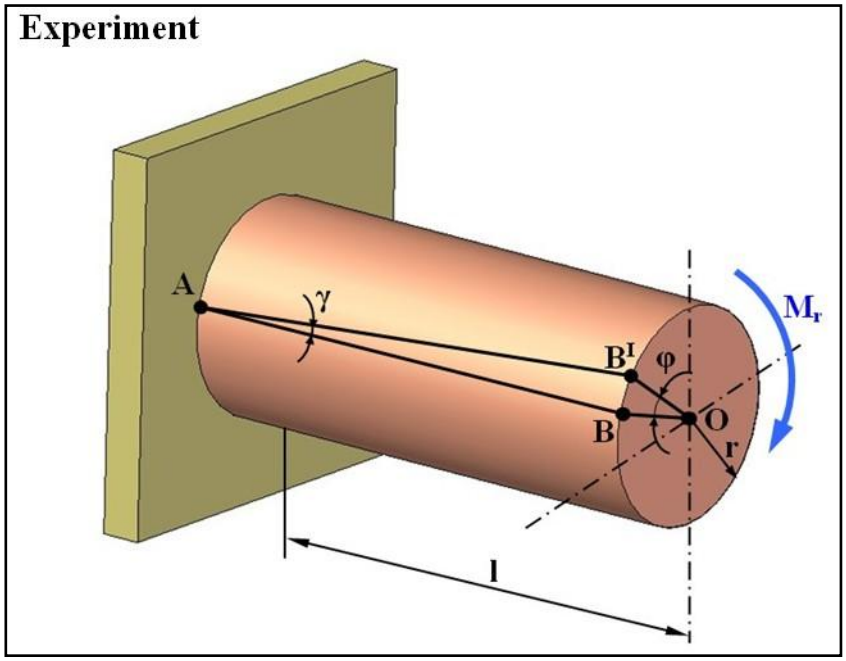
Observaţie

Solicitarea de răsucire se studiază mai simplu în cazul secţiunilor circulare sau inelare; aceste cazuri vor fi tratate în continuare.

Ipoteze

- Axa barei rămâne dreaptă.
- Secţiunile transversale se rotesc relativ una faţă de cealaltă.
- Dacă o extremitate a barei este fixă, rotirea este cu atât mai mare cu cât secţiunea este mai depărtată de capătul fix.
- Secţiunile rămân plane şi după deformare (Bernoulli).
- Nu apar eforturi unitare normale pe secţiune.

Ca şi la celelalte solicitări, se poate pune în evidenţă o legătură între efort şi deformaţie. Considerăm o bară dreaptă, de secţiune circulară, solicitată la răsucire.



Ca urmare a acţiunii momentului de răsucire M_r linia **AB** se roteşte, devenind linia AB^I.

Se formează două triunghiuri – ABB^I şi OBB^I.

$$\left.\begin{aligned} tg\gamma &= \frac{BB^I}{AB} \\ tg\varphi &= \frac{BB^I}{OB} \end{aligned}\right\} \rightarrow \quad BB^I = AB \cdot tg\gamma = OB \cdot tg\varphi \quad \rightarrow \quad tg\gamma = \frac{OB}{AB} \cdot tg\varphi$$

Pentru unghiuri mici (ipoteza deformaţiilor mici) tangentele sunt aproximativ egale cu unghiurile exprimate în radiani:

$$\boxed{\gamma = r \cdot \frac{\varphi}{l}}$$

Observaţie

Unghiul φ depinde de distanţa l; putem defini un unghi de rotire specifică θ, ce caracterizează o anumită solicitare:

$$\theta = \frac{\varphi}{l}$$

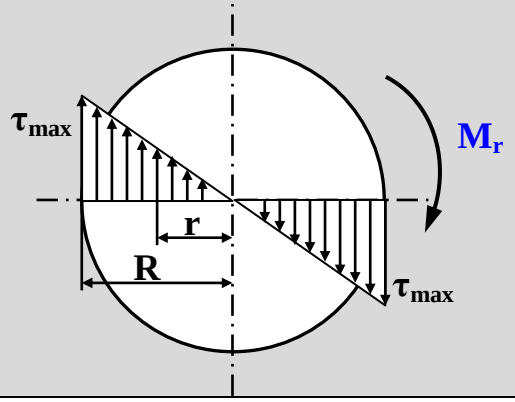
Rezultă relaţia de deformare:

$$\gamma = r \cdot \theta$$

La răsucirea barelor rotunde avem numai eforturi unitare tangenţiale, care sunt proporţionale cu alunecările specifice, conform legii lui Hooke:

$$\boxed{\frac{\tau}{\gamma} = G} \qquad \boxed{\frac{\tau}{r \cdot \theta} = G}$$

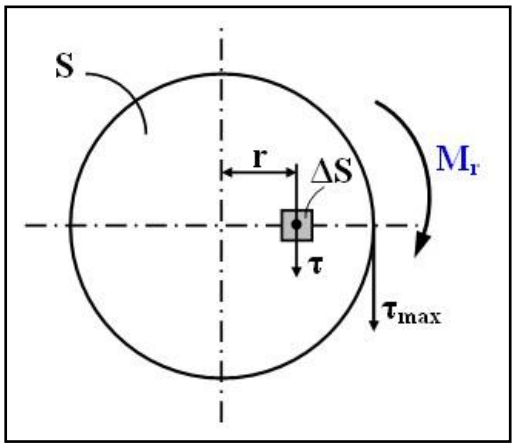
Observaţie



Efortul unitar tangenţial este proporţional cu raza: la centru este nul iar la periferie maxim.

$$\tau_{max} = G \cdot r \cdot \theta$$

Sub acţiunea momentului de răsucire în bara rotundă apar eforturi unitare tangenţiale iar bara este în echilibru.



$$M_r = \sum_S \tau \cdot \Delta S \cdot r$$

$$M_r = \sum_S G \cdot r^2 \cdot \theta \cdot \Delta S$$

$$M_r = G \cdot \theta \cdot \sum_S r^2 \cdot \Delta S$$

$$M_r = G \cdot \theta \cdot I_p$$

Rezultă:

$$\boxed{M_r = \frac{\tau}{r} \cdot I_p} \quad \text{sau} \quad \boxed{\tau = M_r \cdot \frac{r}{I_p}} \quad \textbf{ecuaţia lui Navier}$$

$$\tau_{max} = M_{r\,max} \frac{r_{max}}{I_p}$$

Din legea lui Hooke avem:

$$G \cdot \theta = \frac{\tau}{r}$$

Sub o formă simplificată scriem:

$$\tau = \frac{M_r \cdot R}{I_p} = \frac{M_r}{\frac{I_p}{R}} = \frac{M_r}{W_p} \quad \rightarrow \quad \boxed{\tau = \frac{M_r}{W_p}}$$

X. 3. Calculul la răsucire

Formula de bază pentru calculul la răsucire este tot o formulă de proporţionalitate între efort şi deformaţie:

$$\boxed{\tau = \frac{M_r}{W_p}}$$

Sunt valabile variantele de calcul prezentate anterior:

- **Dimensionarea**
- **Verificarea**
- **Determinarea momentului de răsucire capabil**

cu variantele de calcul:

- **condiţia de rezistenţă**
- **condiţia de rigiditate**

> **Observaţie**
>
> Răsucirea este solicitarea predominantă a arborilor maşinilor; la aceste tipuri de calcule apar puterea şi turaţia, astfel că se vor trata separat.

X. 4. Mersul calculelor

X. 4. 1. Condiţia de rezistenţă

Dimensionarea

1. Se dă momentul de răsucire M_r.

2. Se alege un material pentru care se determină, din tabelul de materiale, rezistenţa admisibilă τ_{ar}.

3. Se calculează modulul de rezistenţă polar necesar, care reprezintă valoarea *minimă* posibilă pentru bară:

$$W_{pnec} \geq \frac{M_r}{\tau_{ar}}$$

4. Valoarea obţinută a modulului de rezistenţă polar se converteşte la un profil standardizat, rotunjită prin mărire.

Pentru secţiunea *circulară*: $W_p = \frac{\pi \cdot d^3}{32}$

inelară: $W_p = \frac{\pi\left(D^4 - d^4\right)}{32D}$

Verificarea

1. Se dau: – momentul de răsucire M_r
– secţiunea efectivă (forma şi mărimea)
– materialul

2. Se determină modulul de rezistenţă polar al secţiunii, W_p.

3. Se determină, din tabelul de materiale, rezistenţa admisibilă τ_{ar}.

4. Se calculează efortul unitar tangenţial efectiv:

$$\tau_{ef} = \frac{M_r}{W_p}$$

5. Se compară cele două eforturi unitare

Dacă: – $\tau_{ef} \le \tau_{ar}$ bara verifică

– $\tau_{ef} > \tau_{ar}$ bara nu verifică

Determinarea momentului de răsucire capabil

1. Se dau: – forma şi mărimea secţiunii efective
   – materialul
2. Se determină modulul de rezistenţă polar al secţiunii, W_p.
3. Se determină, din tabelul de materiale, rezistenţa admisibilă τ_{ar}.
4. Se calculează forţa capabilă a barei, care reprezintă valoarea *maximă* posibilă pentru bară:

$$M_{rcap} \le W_p \cdot \tau_{ar}$$

X. 4. 2. Condiţia de rigiditate

Se impune o valoare admisibilă pentru unghiul de rotire specifică – θ_a, care apare în toate cazurile.

$$\theta_a = \frac{M_r}{G \cdot I_p}$$ relaţia de echilibru

Dimensionarea

1. Se dă momentul de răsucire M_r.
2. Se alege un material pentru care se determină, din tabelul de materiale, modulul de elasticitate transversală G.
3. Se calculează momentul de inerţie polar necesar al secţiunii, care reprezintă valoarea *minimă* posibilă:

$$I_{pnec} \ge \frac{M_r}{G \cdot \theta_a}$$

4. Valoarea obţinută a momentului de inerţie polar se converteşte la un profil standardizat, rotunjită prin mărire.

Pentru secţiunea *circulară*: $I_p = \frac{\pi \cdot d^4}{32}$

inelară: $I_p = \frac{\pi}{32} \cdot \left(D^4 - d^4\right)$

X. 5. Calculul la răsucire al arborilor

Arbore – bară în mişcare de rotaţie uniformă, solicitată de un număr de momente de răsucire.

În mod curent momentele de răsucire sunt denumite **cupluri** în limbajul tehnic.

X. 5. 1. Diagrama momentelor de răsucire

Această diagramă ne arată distribuţia momentelor de răsucire în lungul arborelui şi permite un calcul cu consumuri minime de material.

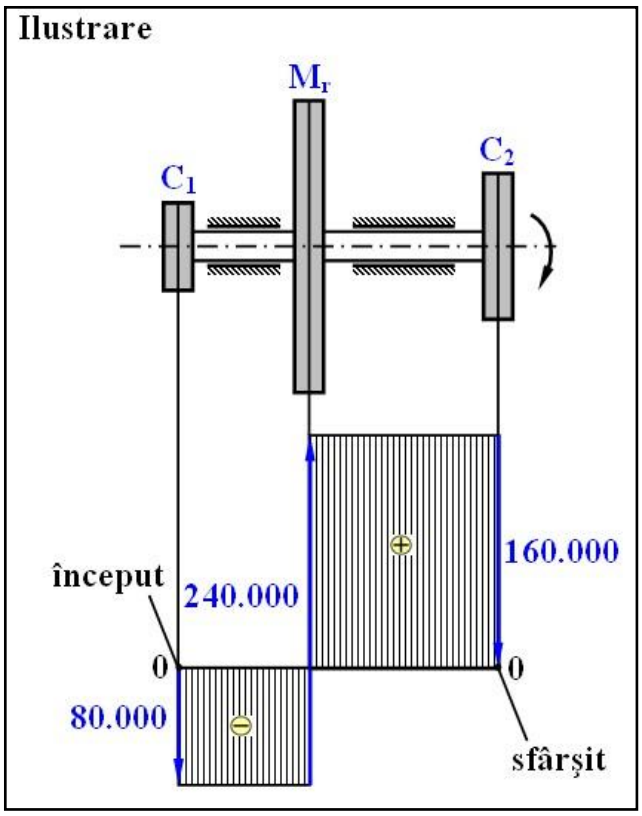
Reguli de trasare

1. Diagrama se trasează la o scară a momentelor de răsucire; acestea se reprezintă prin vectori perpendiculari pe axa de referinţă.
2. Vectorii pozitivi reprezintă momente de răsucire **motoare** iar vectorii negativi momente de răsucire **consumatoare** (rezistente).
3. Diagrama este formată din linii orizontale, care fac un salt în dreptul momentelor de răsucire.
4. Deasupra liniei de referinţă diagrama se consideră *pozitivă*.

> **Observaţie**
>
> Ca şi la diagrama momentelor încovoietoare, momentul de răsucire într–o secţiune este egal cu suma momentelor din stânga secţiunii sau cu suma momentelor din dreapta secţiunii cu semn schimbat.

X. 5. 2. Aplicaţie

Să se traseze diagrama momentelor de răsucire pentru arborele din figură.



motor:

M_r = 240.000 N·mm

consumatori:

C_1 = 80.000 N·mm

C_2 = 160.000 N·mm

Calculul momentului de răsucire

Din diagrama momentelor de răsucire rezultă că pe sectorul dintre două momente diagrama are valoare constantă. Vom dimensiona deci pentru fiecare sector.

În practică se dau puterile şi turaţiile arborilor. Avem următoarea relaţie între puterea transmisă, momentul de răsucire şi viteza unghiulară:

$$P = M_r \cdot \omega \quad \rightarrow \quad M_r = \frac{P}{\omega}$$

Introducând turaţia **n** avem:

$$M_r = 9{,}55 \cdot 10^6 \frac{P}{n}$$

Observaţie

Pentru un arbore de turaţie dată diagrama momentelor de răsucire reprezintă, la altă scară, **diagrama puterilor**.

Cunoscând momentul de răsucire, calculul decurge în continuare conform variantelor prezentate anterior.

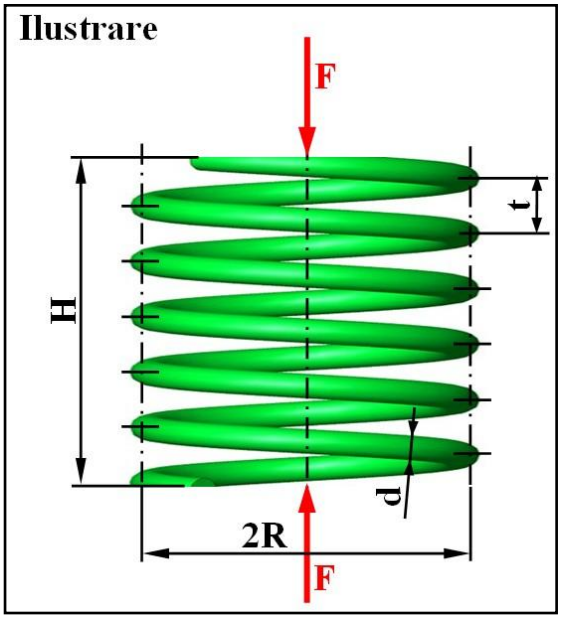
X. 6. Sinteza solicitării

Legea lui Hooke (domeniul elastic)	$\frac{\tau}{\gamma} = G$	$\frac{M_r \cdot l}{I_p \cdot \varphi} = G$
Felul calculului	**Condiţia de rezistenţă**	**Condiţia de rigiditate**
Dimensionarea	$W_{Pnec} \geq \frac{M_r}{\tau_{ar}}$	$I_{Pnec} \geq \frac{M_r}{G \cdot \theta_a}$
Verificarea	$\tau_{ef} = \frac{M_r}{W_p} \leq \tau_{ar}$	$\theta_{ef} = \frac{M_r}{G \cdot I_P} \leq \theta_a$
Determinarea momentului capabil	$M_{rcap} \leq W_p \cdot \tau_{ar}$	$M_{tcap} \leq \theta_a \cdot G \cdot I_P$

X. 7. Particularizare – calculul arcurilor elicoidale cilindrice

Solicitarea exterioară a arcului elicoidal poate să fie de întindere sau compresiune însă în secţiunile sârmei apare **răsucirea** şi, în mică măsură, forfecarea.

Ilustrare



Considerăm numai solicitarea de răsucire.

Pentru o spiră:

$$M_r = F \cdot R$$

$$\frac{\pi \cdot d^3}{16} = \frac{F \cdot R}{\tau_{ar}}$$

dimensionarea:

$$d \geq \sqrt{\frac{16 \cdot F \cdot R}{\pi \cdot \tau_{ar}}}$$

verificarea:

$$\tau_{ef} = \frac{16 \cdot F \cdot R}{\pi \cdot d^3} \leq \tau_{ar}$$

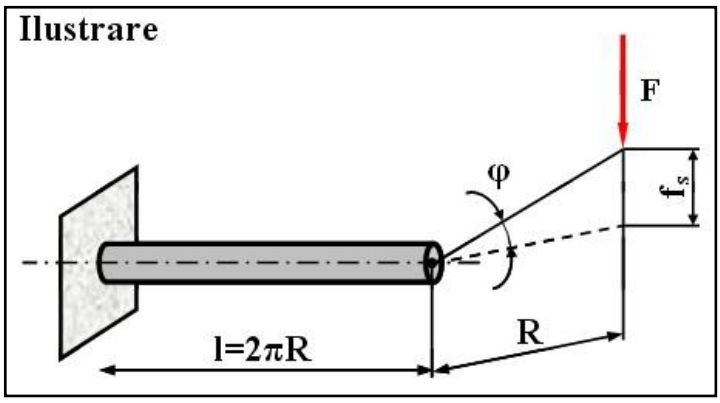
determinarea forţei capabile:

$$F_{cap} \leq \frac{\pi \cdot d^3 \cdot \tau_{ar}}{16 \cdot R}$$

săgeata arcului:

Săgeata **f** a unui arc elicoidal este valoarea lungirii sau scurtării sale, măsurată pe axa arcului.

Considerăm o spiră desfăşurată, care se deformează sub acţiunea forţei exterioare.



$$f_s = R \cdot tg\theta \cong R \cdot \theta$$

$$\phi = \frac{M_r \cdot l}{G \cdot I_p}$$

(la unghiuri mici)

Înlocuim: $M_r = F \cdot R$

$l = 2 \cdot \pi \cdot R$

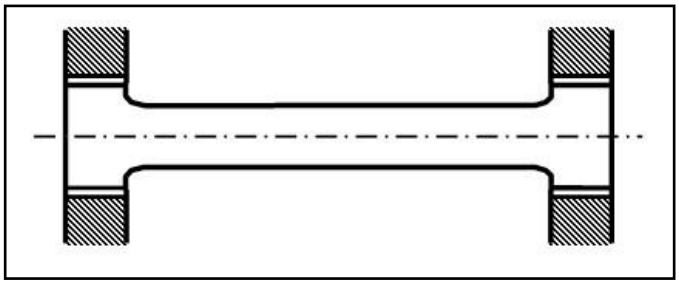
$$I_p = \frac{\pi \cdot d^4}{32}$$

şi considerăm că arcul are **z** spire:

$$\boxed{f = \frac{64 \cdot F \cdot R^3 \cdot z}{G \cdot d^4}}$$

X. 7. 1. Aplicaţii

I. ***Să se dimensioneze arcul bară de torsiune din figură având următoarele date:***



momentul de răsucire:

M_r = **56.000** N·mm

materialul arcului:

oţel de arc **ARC 2** cu τ_{ar} = **600** $\frac{N}{mm^2}$

Rezolvare:

Problema se bazează pe condiţia de rezistenţă.

1. Calculăm modulul de rezistenţă polar necesar:

$$W_{Pnec} \geq \frac{56.000}{600}$$

$$W_{Pnec} \geq 93,33\,mm$$

2. Calculăm diametrul necesar pentru secţiunea circulară:

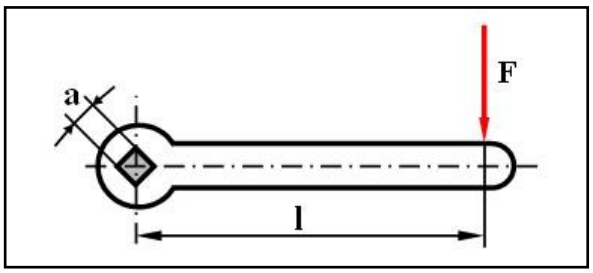
$$d_{nec} \geq \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 93,33}{\pi}}$$

$$d_{nec} \geq 9,83\,mm$$

Rotunjim valoarea obţinută la dimensiunea standardizată cea mai apropiată:

$$d_{arc} = 10\ mm$$

II. ***Să se verifice acţionarea prin profil pătrat a manivelei din figură, având datele alăturate:***



a = 16 mm

l = 200 mm

F = 200 N

materialul profilului pătrat – **OL 37**

Rezolvare:

Problema se bazează pe condiţia de rezistenţă.

1. Calculăm momentul de răsucire:

$$M_r = 200 \cdot 200 = 40.000 \text{ N} \cdot \text{mm}$$

2. Determinăm modulul de rezistenţă polar al secţiunii:

$$W_p = \frac{16^3}{6} = 682{,}66 \text{ mm}^3$$

3. Determinăm din tabelul Nr. 1 rezistenţa admisibilă pentru OL 37 – $\tau_{ar} = 80 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$

4. Calculăm efortul unitar tangenţial efectiv:

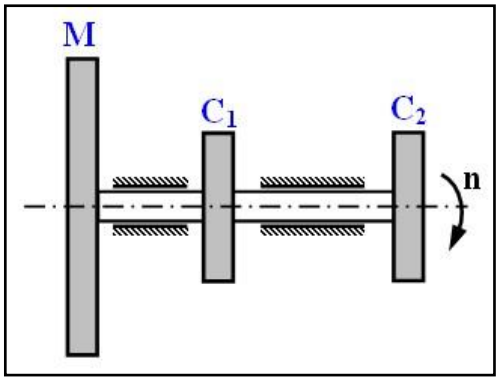
$$\tau_{ef} = \frac{40.000}{682{,}66} = 58{,}6 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

5. Comparăm cele două eforturi unitare:

$$58{,}6 < 80$$

Bara verifică.

II. Să se dimensioneze la forfecare arborele din figură, cu datele alăturate:



M = 5 kW

C_1 = 3 kW

C_2 = 2 kW

n = 1.500 $\frac{\text{rot}}{\text{min}}$

Rezolvare:

Problema se bazează pe condiţia de rezistenţă.

1. Trasăm diagrama puterilor

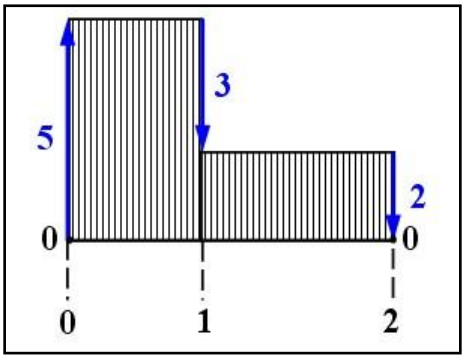


Diagrama puterilor reprezintă, la altă scară, diagrama momentelor de răsucire.

2. Calculăm momentele de răsucire pe cele două segmente:

$$M_{r01} = 9.550.000 \frac{5}{1.500} = 31.830 \ N \cdot mm$$

$$M_{r12} = 9.550.000 \frac{2}{1.500} = 12.730 \ N \cdot mm$$

3. Alegem pentru arbore, din Tabelul nr. 1, oţelul OL 50 pentru care apreciem $\tau_{ar} = 100 \ \frac{N}{mm^2}$

4. Calculăm modulele de rezistenţă polare necesare secţiunilor celor două segmente:

$$W_{P01} \geq \frac{31.830}{100} = 318,3 \ mm^3$$

$$W_{P12} \geq \frac{12.730}{100} = 127,3 \ mm^3$$

5. Calculăm diametrele necesare celor două segmente, pentru secţiunea circulară:

$$d_{01} \geq \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 318,3}{\pi}} \quad \rightarrow \quad d_{01} \geq 14,8 \ mm$$

$$d_{12} \geq \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 127,3}{\pi}} \quad \rightarrow \quad d_{02} \geq 10,9 \ mm$$

Rotunjim la valorile standardizate cele mai apropiate:

$d_{01} = 15$ mm
$d_{12} = 11$ mm

IV. ***Să se dimensioneze, din OLC 75 A, cu*** $\tau_{ar} = 280 \ \frac{N}{mm^2}$ ***, un arc elicoidal cilindric, cu raza spirei R = 10 mm, solicitat la compresiune de forţa*** $F = 600$ ***N:***

Rezolvare:

Problema se bazează pe condiţia de rezistenţă. Deşi arcul este solicitat la compresiune, semifabricatul spirei este solicitat la răsucire. Avem date prin enunţ toate elementele necesare.

1. Calculăm diametrul semifabricatului:

$$d \geq \sqrt{\frac{16 \cdot 600 \cdot 10}{\pi \cdot 280}}$$

$$d \geq 4,77 \quad mm$$

Rotunjim la valoarea standardizată cea mai apropiată:

$d = 5$ mm

XI. FLAMBAJUL

XI. 1. Mărimi utilizate

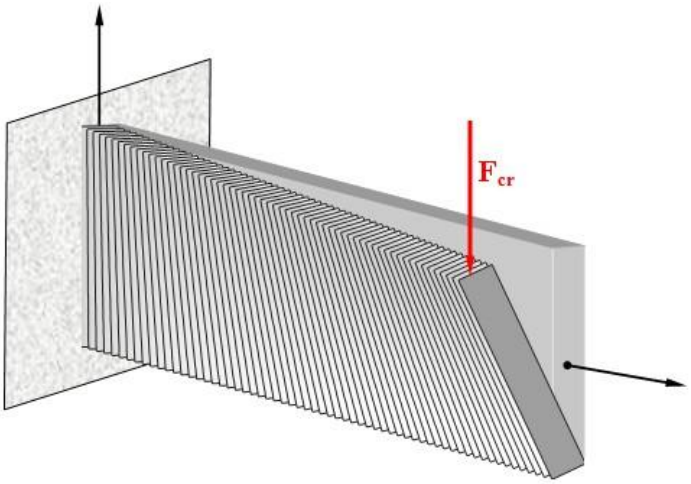
Simbolul	Denumirea	Unitatea de măsură
l_f	lungimea de flambaj	mm
i_{min}	raza de giraţie minimă	mm
S	secţiunea	mm^2
I_{min}	modulul de inerţie axial minim	mm^4
F_f	forţa critică de flambaj	N
N	forţa normală	N
σ_a	efortul unitar admisibil	$\frac{N}{mm^2}$
σ_c	efortul unitar limită la curgere	$\frac{N}{mm^2}$
σ_e	efortul unitar limită a elasticităţii	$\frac{N}{mm^2}$
σ_f	efortul unitar critic la flambaj	$\frac{N}{mm^2}$
E	modulul de elasticitate longitudinală	$\frac{N}{mm^2}$
a, b	coeficienţi empirici	–
C_e	coeficient de siguranţă la flambaj	–
λ	coeficient de zvelteţe	–
λ_0	coeficient de zvelteţe corespunzător efortului unitar	–
λ_1	coeficient de zvelteţe corespunzător efortului unitar	–

XI. 2. Generalităţi

Flambajul constă în trecerea unei piese din starea de echilibru stabil în starea de echilibru instabil, la o anumită valoare (critică) a sarcinilor aplicate.

> **Observaţie**
>
> Forţa critică de flambaj depinde de forma şi dimensiunile piesei, felul de rezemare, felul de aplicare al sarcinilor.

Ilustrare



Pierderea stabilităţii unei piese duce la distrugere; impunem ca forţa reală care solicită piesa să fie mai mică decât forţa critică de flambaj.

Coeficientul de siguranţă la flambaj C_e arată de câte ori este mai mică forţa reală faţă de forţa critică de flambaj.

Forţei critice de flambaj îi corespunde un **efort unitar critic de flambaj** σ_f. Dacă îl comparăm cu valorile critice de pe curba lui Hooke, observăm că acest efort se poate situa în zona de deformare elastică sau în zona de deformare plastică, astfel că vom deosebi două situaţii:

- **flambajul elastic**, care a fost rezolvat pentru bare drepte de către L. Euler
- **flambajul plastic**, care prezintă dificultăţi şi se rezolvă prin formule empirice, rezultate din experimente

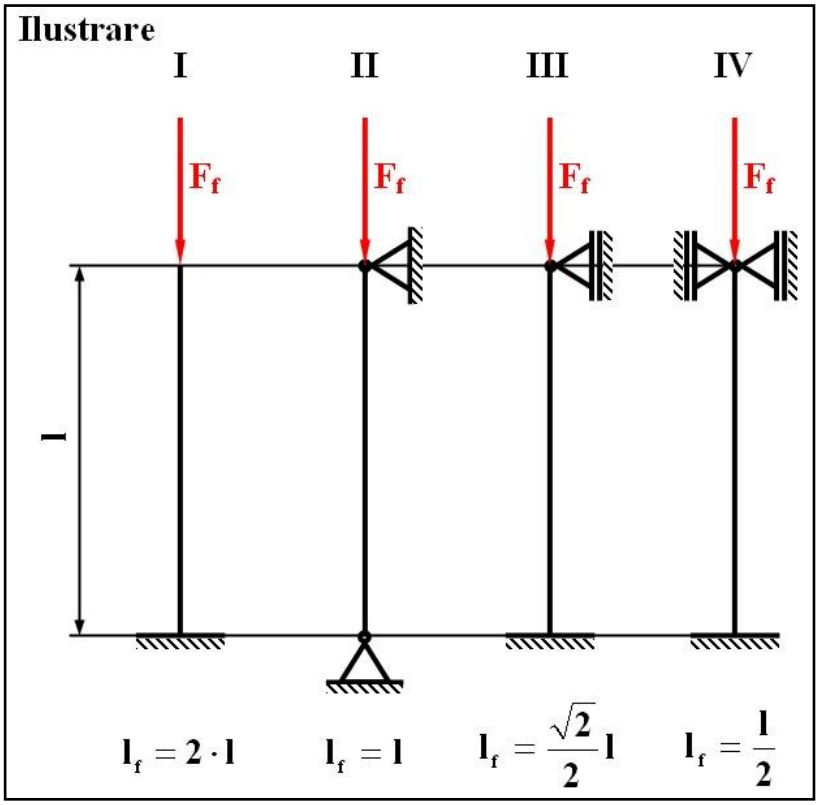
XI. 3. Flambajul barelor drepte, comprimate axial

Forţa critică de flambaj a fost determinată matematic de către Leonhard Euler:

$$F_f = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{min}}{l_f^2}$$

Lungimea de flambaj l_f depinde de modul de rezemare şi de lungimea barei.

I. încastrată la un capăt, liberă la celălalt
II. articulată la ambele capete
III. încastrată la un capăt, articulată la celălalt
IV. încastrată la ambele capete



Rezultă efortul unitar critic la flambaj:

$$\sigma_f = \frac{F_f}{S}$$

care trebuie să fie mai mic decât rezistenţa admisibilă

$$\sigma_f \leq \sigma_a$$

Deoarece $I_{min} = S \cdot i_{min}^2$ avem:

$$\sigma_f = \frac{\pi^2 \cdot E}{\left(\frac{l_f}{i_{min}}\right)^2}$$

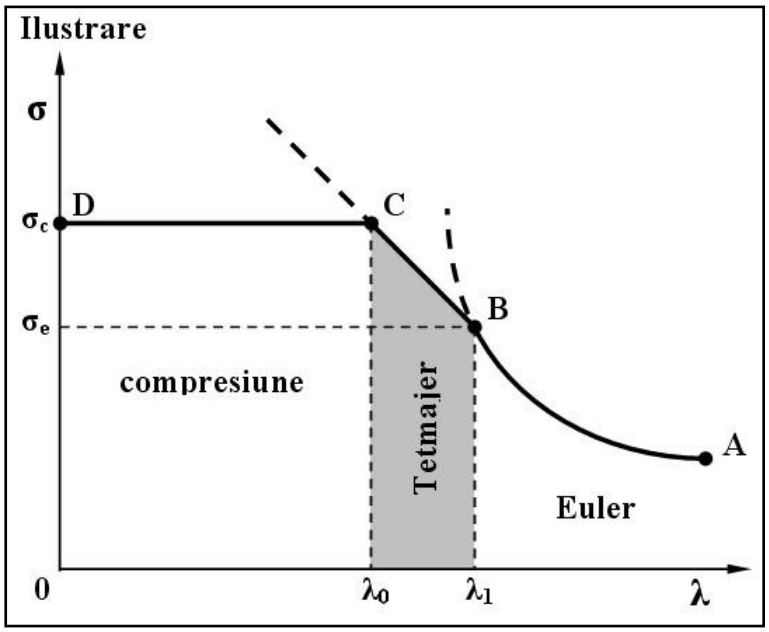
Am scris numitorul sub această formă pentru a ne crea un termen caracteristic:

$$\frac{l_f}{i_{min}} = \lambda \quad \textbf{coeficient de zvelteţe (subţirime)}$$

după care rezultă formula finală:

$$\boxed{\sigma_f = \frac{\pi^2 \cdot E}{\lambda^2}}$$

Între efortul unitar critic la flambaj σ_f şi coeficientul de zvelteţe λ există o relaţie care reprezintă o hiperbolă.



Această curbă există până când efortul unitar critic atinge valoarea σ_c, la care se termină domeniul elastic de pe curba lui Hooke şi pentru care corespunde coeficientul de zvelteţe λ_0.

Pentru valori mai mici decât λ_0 ale coeficientului de zvelteţe efortul unitar critic la flambaj nu mai corespunde hiperbolei lui Euler, întrucât bara se află în domeniul deformaţiilor plastice.

O formulă empirică uzuală este dată de Tetmajer:

$$\sigma_f = a - b \cdot \lambda$$

corespunzătoare unei drepte, care este valabilă până la un punct care corespunde limitei de curgere σ_c, respectiv unui coeficient de zvelteţe λ_1.

Pentru valori sub λ_1 ale coeficientului de zvelteţe se consideră că bara nu mai flambează, astfel că se utilizează calculul la compresiune.

XI. 4. Mersul calculelor

Dimensionarea

Iniţial nu se cunoaşte domeniul – flambaj elastic sau flambaj plastic – aşadar nici formula de calcul. Se începe cu formula lui Euler, explicitată în raport cu momentul de inerţie.

1. Se dau: – forţa F_f
   – modul de rezemare şi lungimea barei
2. Se determină, din Tabelul nr. 4, coeficientul de siguranţă la flambaj C_e.

Tabelul nr. 4

Utilizări		C_e
Piese metalice uzuale		3,5
Construcţii metalice		4
Piese din fontă		6
Piese supuse la solicitări variabile	pulsante	8 – 14
	alternante	18 – 21

3. Se calculează lungimea de flambaj $\mathbf{l_f}$.
4. Se alege un material din Tabelul nr. 5, pentru care se scoate modulul de elasticitate longitudinală **E**.

Tabelul nr. 5

Materialul	E	σ_c	λ_0	λ_1	Tetmajer σ_f
	$\frac{N}{mm^2}$	$\frac{N}{mm^2}$	–	–	$\frac{N}{mm^2}$
oţel OL 37	205.000	240	105	60	$310 - 1{,}14\cdot\lambda$
oţel OL 48	205.000	310	100	60	$469 - 2{,}62\cdot\lambda$
oţel OL 52	205.000	360	100	60	$589 - 3{,}82\cdot\lambda$
oţel cu 5% nichel	205.000	–	86	0	$470 - 2{,}3\cdot\lambda$
fontă cenuşie	160.000	–	80	0	$776 - 12\cdot\lambda + 0{,}053\cdot\lambda^2$
duraluminiu	75.000	–	50	0	$380 - 2{,}185\cdot\lambda$
lemn	12.000	–	100	0	$29{,}3 - 0{,}194\cdot\lambda$

5. Se calculează momentul de inerţie minim necesar:

$$\mathbf{I_{min\cdot nec} = \frac{F_f \cdot C_e \cdot l_f^2}{\pi^2 \cdot E}}$$

6. Se alege o formă optimă de secţiune, pentru care se cunoaşte formula momentului de inerţie (Tabelul nr. 2)
7. Se calculează secţiunea aleasă **S**.
8. Se calculează raza de giraţie minimă:

$$\mathbf{i_{min} = \sqrt{\frac{I_{min}}{S}}}$$

9. Se calculează coeficientul de zvelteţe:

$$\lambda = \frac{l_f}{i_{min}}$$

10. Se scot, din Tabelul nr. 5, coeficienţii λ_0, λ_1 pentru materialul ales:

$\lambda_0 = \ldots$ $\lambda_1 = \ldots$

11. Dacă: **a.** $\lambda > \lambda_0$ **calculul este corect şi încheiat**

b. $\lambda_1 < \lambda < \lambda_0$ **se aplică formula Tetmajer corespunzătoare materialului şi se obţine efortul unitar critic de flambaj** σ_f

11b. Se calculează rezistenţa admisibilă la flambaj cu formula de la compresiune:

$$\sigma_{af} = \frac{\sigma_f}{C_e}$$

12b. Se calculează forţa admisibilă la flambaj:

$$F_{af} = S \cdot \sigma_{af}$$

13b. Dacă: – $\mathbf{F_f \le F_{af}}$ calculul este corect şi încheiat

– $\mathbf{F_f \ge F_{af}}$ se măreşte secţiunea **S** şi se reîncepe calculul de la punctul 8.

c. $\lambda < \lambda_1$ se calculează ca la compresiune

11c. Se calculează rezistenţa admisibilă :

$$\sigma_{ac} = \frac{\sigma_f}{C_e}$$

12c. Se calculează forţa admisibilă la compresiune:

$$F_{af} = S \cdot \sigma_{af}$$

13c. Dacă: – $\mathbf{F_f \le F_{ac}}$ calculul este corect şi încheiat

– $\mathbf{F_f \ge F_{ac}}$ se măreşte secţiunea **S** şi se reîncepe calculul de la punctul 8.

Verificarea

1. Se dau: – forţa F_f

   – modul de rezemare şi lungimea barei

   – forma şi dimensiunile secţiunii barei

   – materialul barei

2. Se calculează lungimea de flambaj l_f
3. Se calculează raza de giraţie minimă i_{min}
4. Se calculează coeficientul de zvelteţe:

$$\lambda = \frac{l_f}{i_{min}}$$

5. Dacă: **a. $\lambda > \lambda_0$ se aplică formula lui Euler**

   6a. Se calculează momentul de inerţie minim I_{min}

   7a. Se determină din Tabelul nr. 4 coeficientul de siguranţă la flambaj C_e

   8a. Se calculează forţa admisibilă la flambaj:

$$F_{af} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{min}}{C_e \cdot l_f^2}$$

   9a. Dacă: – $\mathbf{F_f \le F_{af}}$ bara verifică

   – $\mathbf{F_f \ge F_{af}}$ bara nu verifică

   b. $\lambda_1 < \lambda < \lambda_0$ se aplică formula Tetmajer corespunzătoare materialului şi se obţine efortul unitar critic de flambaj σ_f

   6b. Se calculează rezistenţa admisibilă la flambaj cu formula de la compresiune:

$$\sigma_{af} = \frac{\sigma_f}{C_e}$$

7b. Se calculează forţa admisibilă la flambaj:

$$\mathbf{F_{af} = S \cdot \sigma_{af}}$$

8b. Dacă: – $\mathbf{F_f \le F_{af}}$ bara verifică

– $\mathbf{F_f \ge F_{af}}$ bara nu verifică

c. $\lambda < \lambda_1$ se calculează ca la compresiune

6c. Se calculează rezistenţa admisibilă :

$$\mathbf{\sigma_{ac} = \frac{\sigma_f}{C_e}}$$

7c. Se calculează forţa admisibilă la compresiune:

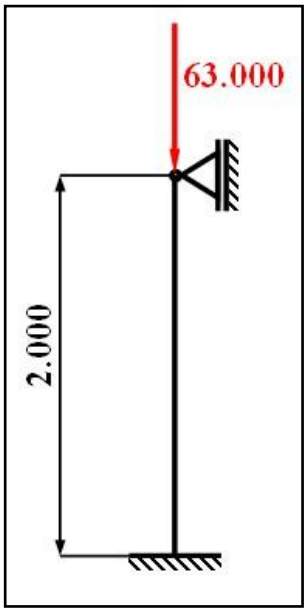
$$\mathbf{F_{af} = S \cdot \sigma_{af}}$$

8c. Dacă: – $\mathbf{F_f \le F_{ac}}$ bara verifică

– $\mathbf{F_f \ge F_{ac}}$ bara nu verifică

XI. 5. Aplicaţii

I. Să se dimensioneze la flambaj bara din figură:



1. Cunoaştem: – $\mathbf{F_f}$ = **63.000 N**

– bară încastrată la un capăt, articulată la celălalt, cu lungimea **l = 2.000 mm**

2. Considerăm bara o construcţie metalică uzuală şi stabilim $\mathbf{C_e} = 4$

3. Calculăm lungimea de flambaj:

$$\mathbf{l_f = \frac{\sqrt{2}}{2} l}$$

$$\mathbf{l_f = 1414{,}21\ mm}$$

4. Alegem ca material oţelul OL 37, pentru care scoatem din Tabelul nr. 5:

$$\mathbf{E = 205.000\ \frac{N}{mm^2}}$$

5. Calculăm momentul de inerţie minim necesar:

$$\mathbf{I_{min.nec} = \frac{63.000 \cdot 4 \cdot 1414{,}21^2}{\pi^2 \cdot 205.000}}$$

$$\mathbf{I_{min.nec} = 249.100{,}73\ mm^4}$$

6. Alegem o secţiune circulară pentru care scoatem, din Tabelul nr. 2, formula momentului de inerţie:

$$\mathbf{I_{cerc} = \frac{\pi \cdot d^4}{64}}$$

7. Calculăm diametrul cercului:

$$\mathbf{d = \sqrt[4]{\frac{64 \cdot 249.100{,}73}{\pi}}}$$

$$\mathbf{d = 47{,}46\ mm}$$

rotunjim la $\mathbf{d = 48\ mm}$ şi calculăm secţiunea cercului:

$$\mathbf{S = \frac{\pi \cdot d^2}{4}}$$

$$\mathbf{S = 1809{,}55\ mm^2}$$

8. Calculăm raza de giraţie; pentru aceasta recalculăm momentul de inerţie:

$$\mathbf{I = \frac{\pi \cdot 48^4}{64} = 260.576{,}26\ mm^4}$$

$$\mathbf{i = \sqrt{\frac{260.576{,}26}{1809{,}55}}}$$

$$\mathbf{i = 12\ mm}$$

9. Calculăm coeficientul de zvelteţe:

$$\mathbf{\lambda = \frac{1414{,}21}{12}}$$

$$\mathbf{\lambda = 117{,}85}$$

10. Scoatem din Tabelul nr. 5 coeficienţii de zvelteţe:

$\lambda_0 = 105$ $\lambda_1 = 60$

Se observă că $\lambda > \lambda_0$

Calculul este corect, bara din enunţ poate fi executată din oţel **OL 37** rotund, cu diametrul stabilit $\mathbf{d = 48\ mm}$.

II. să se verifice la flambaj un stâlp din fontă cenuşie de secţiune inelară, cu diametrul exterior $\boldsymbol{D = 80\ mm}$ *şi diametrul interior* $\boldsymbol{d = 50\ mm}$*, articulat la ambele capete, având înălţimea* $\boldsymbol{l = 1.800\ mm}$*, solicitat de o forţă* $\boldsymbol{F_f = 120.000\ N}$.

1. Cunoaştem toate datele iniţiale
2. Calculăm lungimea de flambaj; pentru bara articulată la ambele capete avem:

$$\mathbf{l_f = l = 1.800\ mm}$$

3. Calculăm raza de giraţie (nu este minimă, secţiunea inelară fiind simetrică faţă de orice axă). Pentru aceasta calculăm întâi momentul de inerţie şi secţiunea:

$$\mathbf{I = \frac{\pi\left(D^4 - d^4\right)}{64} = 1.703.823{,}1\ mm^4}$$

$$\mathbf{S = \frac{\pi\left(D^2 - d^2\right)}{4} = 3.063{,}05\ mm^2}$$

$$\mathbf{i = \sqrt{\frac{1.703.823{,}1}{3.063{,}05}} = 23{,}58\ mm}$$

4. Calculăm coeficientul de zvelteţe:

$$\mathbf{\lambda = \frac{1.800}{23{,}58}}$$

$\lambda = 76{,}33$

5. Pentru fontă cenuşie $\lambda_0 = 80$

$$76,33 < 80$$

Se aplică formula Tetmajer pentru fontă cenuşie:

$$\sigma_f = 776 - 12 \cdot 76,33 + 0,053 \cdot 76,33^2$$

$$\sigma_f = 166,7 \ \frac{N}{mm^2}$$

6. Calculăm rezistenţa admisibilă la flambaj, ţinând seama că pentru construcţiile metalice coeficientul $C_e = 4$.

$$\sigma_{af} = \frac{166,7}{4}$$

$$\sigma_{af} = 42,2 \ \frac{N}{mm^2}$$

7. Calculăm forţa admisibilă la flambaj:

$$F_{af} = 3.063,05 \cdot 42,2$$

$$F_{af} = 129.254,8 \ N$$

8. Comparăm cele două forţe:

$$120.000 < 129.254,8$$

Bara verifică.

XII. ÎNCERCĂRILE MECANICE ALE MATERIALELOR

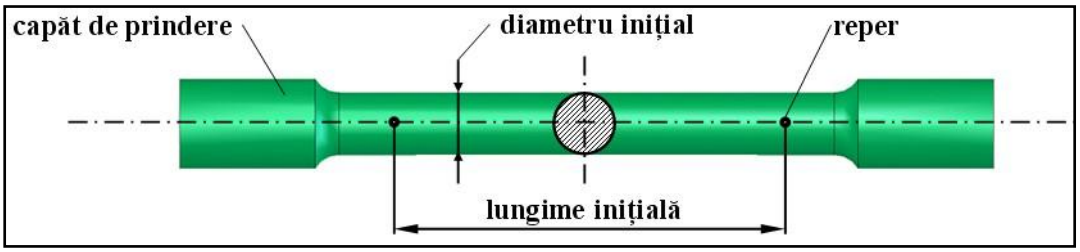
Solicitările studiate au pus o condiţie pentru calcule: cunoaşterea rezistenţelor admisibile. Aceste rezistenţe admisibile se determină în funcţie de anumite valori **experimentale**:

- limita de elasticitate
- limita de curgere
- limita de rupere

Valorile experimentale se determină prin încercări de laborator care utilizează:

- epruvete
- maşini de încercat
- aparate de măsurat forţe şi deformaţii

Epruveta este o piesă standardizată, destinată a fi supusă la încercări pentru determinarea unei proprietăţi.



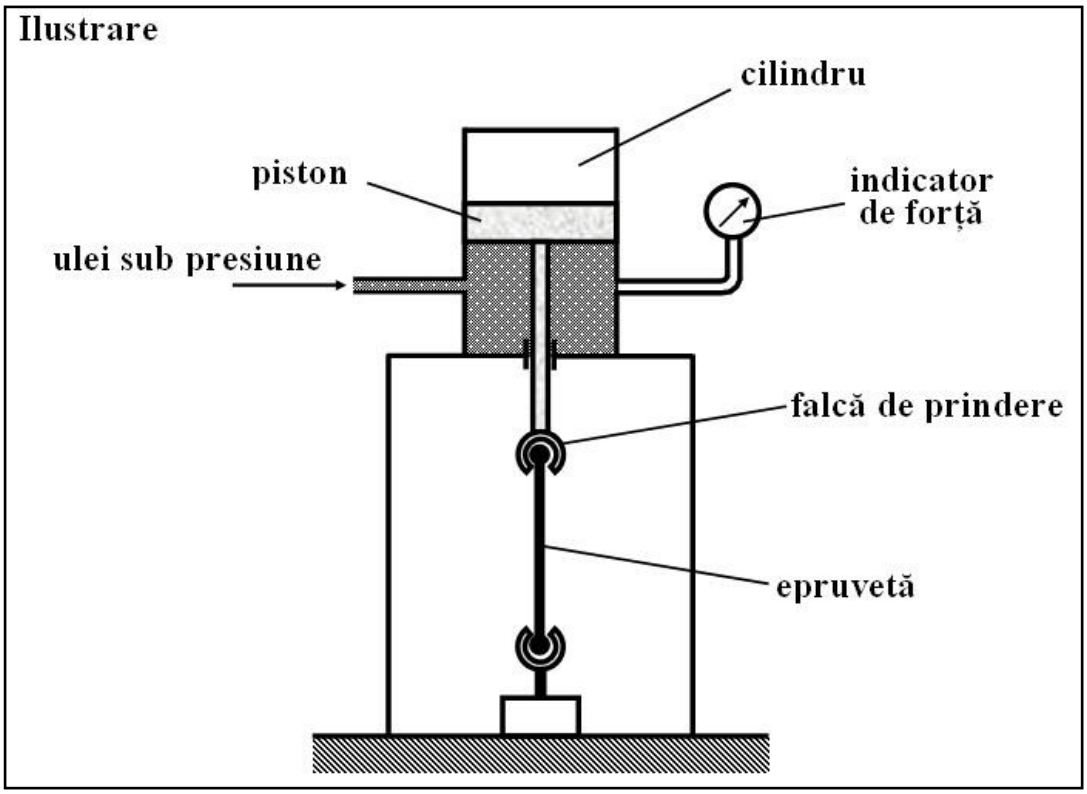
Maşina de încercat este un complex format din două grupe de mecanisme:

- *mecanismul de încărcare*, care are rolul de a transmite mişcarea ce solicită epruveta
- *mecanismul de măsurare*, care are rolul de a măsura (mecanic, hidraulic, electric, mixt) sarcina aplicată epruvetei

Maşinile pentru încercări statice sunt de următoarele tipuri:

- pentru încercări de întindere
- pentru încercări de compresiune
- pentru încercări de răsucire
- universale

O maşină pentru încercări la întindere este alcătuită ca în schema de mai jos:



Aparatul de măsurat este un complex separat de maşina de încercat, care are rolul de a măsura sau înregistra forţele şi deformaţiile aplicate epruvetelor.

Încercările mecanice pe care le studiază rezistenţa materialelor se clasifică astfel:

1. ***încercări statice:***
   - de întindere
   - de compresiune
   - de forfecare
   - de încovoiere
   - de răsucire
2. ***încercări dinamice***
3. ***încercări la oboseală***

Observaţie

Încercările mecanice fac parte din domeniul încercărilor materialelor care mai cuprinde:

- încercările fizice
- încercările chimice
- încercările tehnologice

XIII. BIBLIOGRAFIE

1. * * *, **Manualul inginerului mecanic. Mecanisme. Organe de maşini. Dinamica maşinilor**, Editura Tehnică, Bucureşti, 1976.

2. Gh. Buzdugan, M. Blumenfeld, **Calculul de rezistenţă al pieselor de maşini**, Editura Tehnică, Bucureşti, 1979.

3. N. S. Gheorghiu şi alţii, **Organe de maşini**, Institutul Politehnic „Traian Vuia", Timişoara, 1979.

4. Gh. Buzdugan, **Rezistenţa materialelor**, Ediţia XI revizuită, Editura Tehnică, Bucureşti, 1980.

5. N. S. Gheorghiu, N. Ionescu, **Organe de maşini I. Transmisii mecanice**, Institutul Politehnic „Traian Vuia" Timişoara, 1982.

6. T. Demian, D. Tudor, E. Grecu, **Mecanisme de mecanică fină**, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1982.

7. D. Pavelescu şi alţii, **Organe de maşini**, vol. I, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1985.

8. HÜTTE, **Manualul inginerului. Fundamente**, Editura tehnică, Bucureşti, 1995.

9. DUBBEL, **Manualul inginerului mecanic. Fundamente**, Editura tehnică, Bucureşti, 1998.

10. **STRENGTH OF MATERIALS ON THE WEB**, Physics Departament, University of Wisconsin Stout.

11. Simon Bickerton, Krishnan Jayaraman, **Mechanics of Materials, Mechanical Engineering,** The University of Auckland, New Zealand, 2004.

12. **Standarde române**. Ediţie oficială.